suma+ 64
Junio 2010, pp.55-59

Poliábolos

Dentro de la selección de juegos geométricos, uno de los más conocidos son los poliminós, puzzle creado por el profesor Solomon W. Golomb en sus años de estudiante y que popularizó con la publicación en 1965 de un libro con ese mismo nombre. A partir de la pieza del dominó, y como generalización, llamó poliminó a las piezas formadas uniendo varios cuadrados por un lado común. Estas piezas permiten un gran estudio de propiedades geométricas: áreas, perímetros, descomposición de figuras, simetrías, giros, etc. Incluso nos podemos encontrar sudokus basados en las piezas de los poliminós (ver Fernández-Aliseda y otros; 2004).

Solomon W. Golomb

No vamos a insistir en este material pues pensamos que es bastante conocido por nuestros lectores; por eso vamos a hablar de otros elementos de la misma familia.

El propio Golomb planteó, ya en 1954, la posibilidad de realizar un puzzle basado en las piezas que se podían conseguir uniendo triángulos equiláteros por un lado común. Años más tarde el matemático escocés T. H. O'Beirne bautizó a estas piezas con el nombre de *poliamantes* partiendo de una idea cercana a la creación de los poliminós, y sacando el nombre de la generalización de la figura del diamante típico de la baraja de cartas francesa formado por la unión de dos triángulos equiláteros. Respecto a estas piezas no vamos a comentar nada pues ya les dedicamos uno de los primeros artículos de esta sección (ver Grupo Alquerque; 2001).

Aunque en los casos anteriores se trabaja con polígonos regulares, no cuesta mucho pensar en ampliar este proceso a polígonos que no lo sean. Así, en el año 1961, el propio O'Beirne hace el primer análisis de la combinación de triángulos rectángulos isósceles. Estas piezas fueron bautizadas por S. J. Collins

Grupo Alquerque de Sevilla
Constituido por:
Juan Antonio Hans Martín. *CC Santa María de los Reyes.*
José Muñoz Santonja. *IES Macarena.*
Antonio Fernández-Aliseda Redondo. *IES Camas.*
juegos@revistasuma.es

con el nombre de *poliábolos*, extrayendo el nombre del juego del diábolo, muy común entre las niñas hace años y que actualmente ha sido recuperado por los malabaristas. La pieza del juego del diábolo estaría formada por dos triángulos rectángulos isósceles, pero curiosamente unidos de una forma que no se considera correcta en los poliábolos. Con ese nombre aparece en el libro de Martin Gardner que figura en la bibliografía.

Con las piezas de los poliábolos se puede hacer un estudio parecido al que realizamos con los hexamantes o como el que se realiza con los pentominós, pero en este caso tenemos varias dificultades añadidas. En primer lugar no todos los lados de la pieza base, el triángulo rectángulo isósceles, son iguales, por ello la variedad de piezas que se pueden formar al unir dos o más piezas se va a disparar respecto de los otros puzzles. Además, una de las medidas de los lados es irracional, lo que va a complicar el estudiar el perímetro de las piezas.

Siempre que trabajamos puzzles de este tipo lo hacemos a tres niveles diferentes: primero el diseño de las piezas, siguiendo un proceso secuencial en donde pasamos de un nivel de dificultad al siguiente probando todas las posibilidades. En segundo lugar hacemos un estudio geométrico de las piezas obtenidas para terminar, en tercer lugar, con la construcción de figuras.

Piezas que forman el puzzle

En primer lugar haremos como en nuestras clases, en las que los alumnos estudian la formación de las piezas partiendo de un nivel para pasar al siguiente. El número de piezas distintas que podemos encontrar son:

Nº de triángulos	Nombre	Cantidad
2	Diábolo	3
3	Triábolo	4
4	Tetrábolo	14
5	Pentábolo	30
6	Hexábolo	104

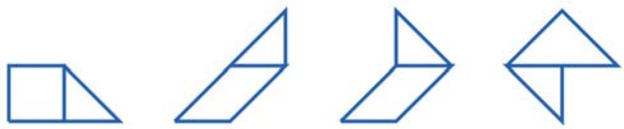
Como es de suponer nosotros solemos parar en los tetrábolos, pues a partir de ahí aparecen demasiadas piezas para poder manejarlas con comodidad, aunque veremos más adelante cómo dar un paso más.

Debemos insistir, cuando se comienza el estudio, que los lados por los que se unen las figuras deben de ser iguales, es decir, no se puede unir un cateto del triángulo con la hipotenusa. Aún con esa condición van a salir muchas piezas que serán polígonos, tanto cóncavos como convexos.

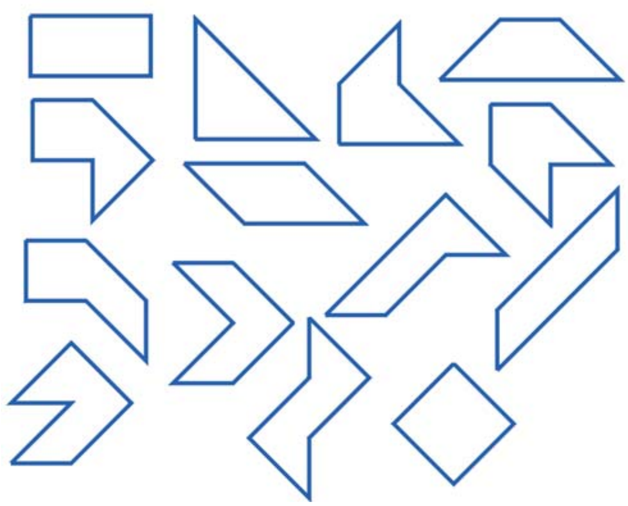
La primera sorpresa que nos encontramos al estudiar los diábolos es que nos surgen las tres piezas intermedias del Tangram Chino.

Como estamos trabajando en el espacio hay que dejar claro que para nosotros serán iguales las dos piezas que se pueden obtener una de otra por giro, traslación o simetría. De esa manera las piezas siguientes son la misma.

Siguiendo la ley de formación, ampliando en las tres piezas de los diábolos un nuevo triángulo en todas las formas posibles, y descartando las piezas que aparecen repetidas, llegamos a los cuatro triábolos.



Por último, para llegar a los 14 tetrábolos partimos de las piezas anteriores. Generalizando a partir del trapecio rectángulo, es posible obtener las primeras ocho piezas. Y completando con las que aparecen distintas al usar el resto de triábolos obtenemos las figuras siguientes:



Una buena actividad, para seguir con el proceso secuencial y acostumbrar a nuestros alumnos a ser sistemáticos en su trabajo, consiste en seleccionar uno cualquiera de los tetrábolos y conseguir todos los pentábolos que se pueden obtener a partir de él añadiéndole un nuevo triángulo en todas las posiciones posibles. Aunque hay piezas como el rectángulo que dan lugar a pocos pentábolos diferentes (el cuadrado sólo una), hay otras que dan mucho juego.

Estudio geométrico de las piezas

1. Estudio de giros y simetrías. Sería una primera aproximación a las piezas, estudiar si tienen ejes de simetría (en el caso de los tetrábolos la mitad de ellas), y cuántos, y estudiar si poseen algún ángulo de giro que las deje invariantes. Este último requerimiento se da en muy pocas piezas.

2. Ángulos. Como la pieza clave posee ángulos de 45° y 90° quiere decir que todos los ángulos interiores serán múltiplos de 45° y podemos encontrar todas las medidas desde 45° hasta 315°.

3. Perímetros. Al trabajar con perímetros tenemos dos valores básicos. Si consideramos que el cateto del triángulo base vale 1, la hipotenusa tiene el valor de $\sqrt{2}$, por lo que el perímetro de las figuras que se construyan siempre serán de la forma $a + b\cdot\sqrt{2}$, aunque en alguno de lo casos a ó b pueden ser cero. Aunque es posible salvar la dificultad de trabajar con los radicales si tenemos dibujados las piezas en una trama cuadrada y llamamos al cateto del triángulo l y a la hipotenusa h, de esa forma para calcular los perímetros basta contar cuantos de cada tipo tiene en su perímetro y todos serán de la forma $a\cdot l+b\cdot h$, siendo a y b dos números naturales. Como sabemos que h es de mayor longitud que l podemos fácilmente ver que todos no tienen el mismo perímetro y agruparlos y ordenarlos según esa medida. En la lista siguiente tenemos las piezas agrupadas según su perímetro.

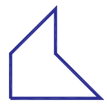
Perímetro= $4\cdot\sqrt{2}$  Perímetro= 6 

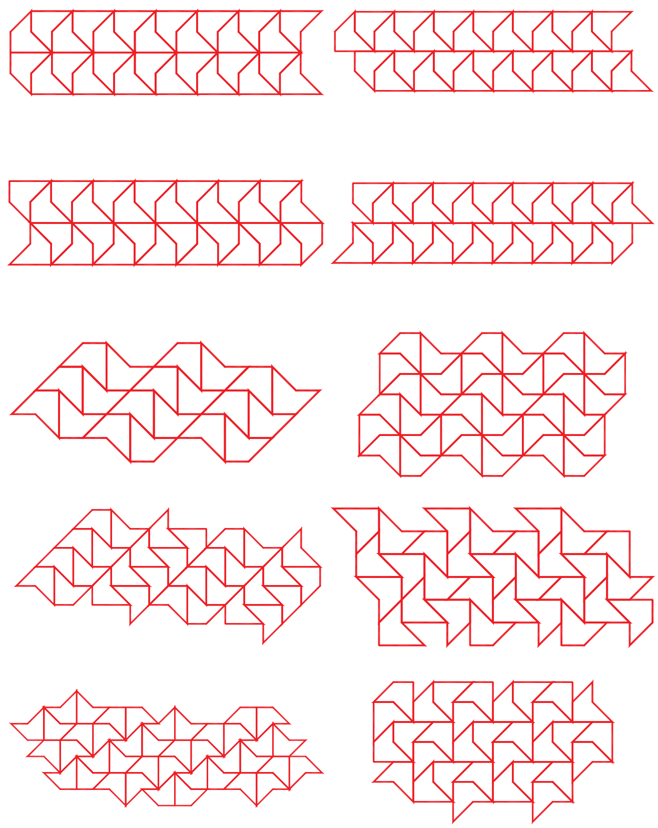
Perímetro= $4+2\cdot\sqrt{2}$ 

Perímetro= $2+4\cdot\sqrt{2}$ 

4. Relación entre poliábolos. Un trabajo atractivo para nuestro alumnado suele ser el relacionar unas piezas con otras de nivel inferior. En concreto ver si es posible obtener todos los tetrábolos uniendo dos diábolos. Por supuesto hay que dejar la posibilidad de que se repita la pieza que se utiliza, en caso contrario más de la mitad de las piezas no se pueden dividir. Otra posibilidad es estudiar todos los pentábolos que se pueden obtener al unir un diábolo con un triábolo.

5. Mosaicos. Otro aspecto interesante es estudiar cuáles de los tetrábolos sirven para teselar el plano. Aquí lo curioso no es sólo que todos los tetrábolos cubran el plano sino que algunas piezas que pueden parecer complicadas den lugar a varias teselaciones distintas. A continuación vemos una serie de mosaicos que recubren el plano utilizando un pentágono irregular como el que se muestra más abajo. Animamos a nuestros lectores a encontrar alguna variación, que seguramente la habrá.



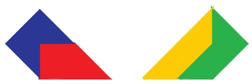


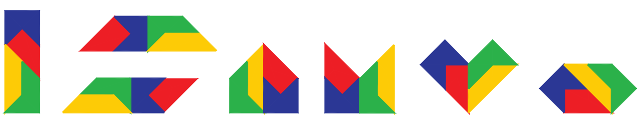
Construcción de figuras

1. Escalas. El primer avance que se puede hacer a la hora de hacer figuras es reproducir las mismas piezas de los poliábolos a distintas escalas. Por ejemplo conseguir, uniendo cuatro tetrábolos distintos, una pieza de un tetrábolo de doble longitud. Hay una pieza para la que creemos que no existe solución: el romboide que tiene mayor perímetro. Si algún lector se anima podemos hacerlo famoso a través de esta sección. También es posible construir una copia en escala 3.

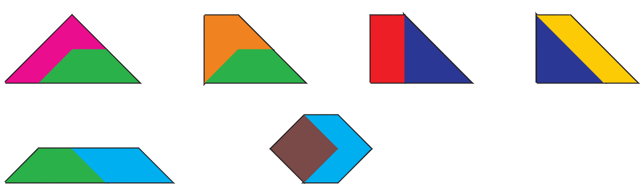
2. Polígonos. El siguiente paso sería la construcción de polígonos. Intentamos siempre pedir polígonos convexos y/o que tengan algún tipo de simetría. Siempre insistimos a nuestros alumnos que aprovechen una imagen que hayan encontrado para, con pequeñas variaciones, intentar encontrar otra distinta.

   Por ejemplo, si trabajamos con los triábolos, podemos construir un par de trapecios rectángulos a partir de los cuales se obtienen varios polígonos fácilmente, algunos de los cuales pueden verse en la imagen siguiente.



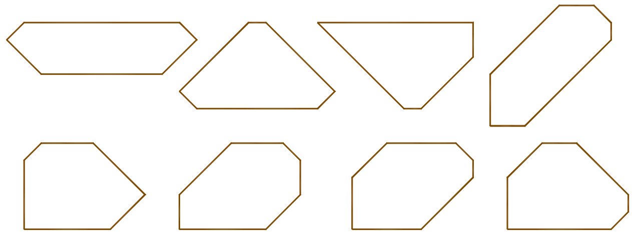


   Otra posibilidad es trabajar con los tetrábolos, pero no con todos. Por ejemplo estudiar los polígonos convexos que podemos construir con dos tetrábolos. No es posible construir paralelogramos pero si triángulos, trapecios y otros polígonos. Veamos algunos ejemplos.



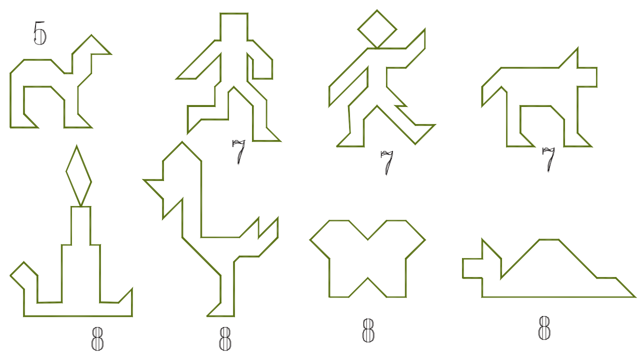
   Como se puede ver en las figuras anteriores, es posible obtener el mismo trapecio de tres formas distintas. Esa es otra forma de trabajar. Construir una figura, por ejemplo con tres tetrábolos e intentar repetir la misma figura con otras tres piezas.

   Un buen estudio es investigar todos los polígonos convexos que se pueden construir con 2, 3, 4... hasta las 14 piezas. Según los estudios hechos con ordenador, sólo existen 8 polígonos convexos que son los que aparecen a continuación.



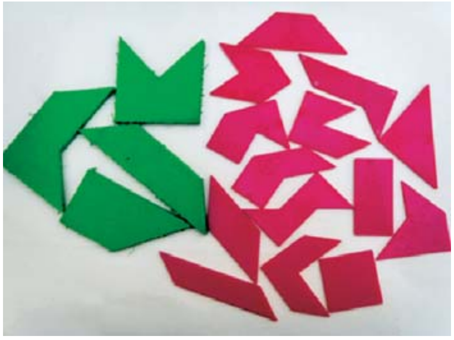
   Aunque de la primera imagen solo hay 236 soluciones distintas, de la última hay un total de 5.365 contabilizadas. Una solución y la cantidad de soluciones que hay se pueden consultar en la página:
   http://www.vicher.cz/puzzle/polyform/tan/tan.htm del profesor Miroslav Vicher.

3. Figuras no geométricas. Una última posibilidad es construir figuras que no sean polígonos, aunque es muy complicado conseguir algo medianamente reconocible, especialmente con todas las piezas. A continuación añadimos algunas, tomadas del material del profesor Picciotto del que más adelante hablaremos, indicando el número de piezas que se necesitan para construirlas.



Para trabajar en el laboratorio

El conseguir los tetrábolos es complicado ya que es difícil encontrarlos comercializados. Nosotros los hemos conseguido en alguna tienda de las Islas Canarias, aunque el material suele ser importado de países anglosajones, en la siguiente fotografía aparecen en rojo un ejemplar de ese material. Aquí no conocemos actualmente ningún fabricante que los construya. Por ello lo mejor es construirlos nosotros mismos en papel, cartón, acetato o en goma espuma, ya que todo ello se puede cortar fácilmente con un cutter. En la fotografía podemos ver también en verde unos triábolos construidos en goma espuma.

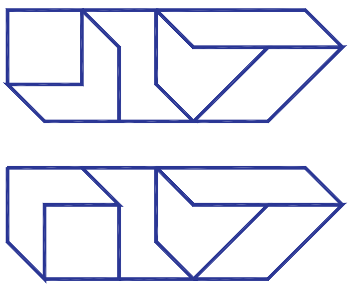


Y desde luego es muy útil trabajar con tramas, ya que a veces es más fácil ver por dónde irán las piezas al contar los triángulos que nos quedan por rellenar y con qué formas podemos jugar para encajarlas en los huecos.

Para profundizar

El trabajo más completo que conocemos sobre los poliábolos es el titulado "Puzzles de tetrisos e outras aventuras no mundo dos poliisos" de Paulus Gerdes, un profesor mozambiqueño con quien hemos tenido el placer de coincidir en algunas jornadas de matemáticas en Portugal. En este libro, el autor hace un estudio exhaustivo sobre las piezas y qué figuras se pueden construir con varios o todos los tetrábolos. También plantea figuras con dos juegos completos de tetrábolos, incluso se adentra en el mundo de los pentábolos.

Realiza un estudio de las partes de una figura que tienen simetrías y que permiten dar una disposición distinta para la solución modificando sólo esas partes. Podemos ver un ejemplo en las imágenes siguientes. También hace un estudio sobre las teselaciones posibles del plano.



El profesor Gerdes cuenta en su libro cómo creó estas figuras, que él llamó poliisos utilizando el comienzo de isósceles, a partir de trabajar con los polimínós y los poliamantes y cómo, una vez terminada la primera versión de su estudio, descubrió que esas piezas llevaban más de cuarenta años ya descubiertas. Esto es algo que nos suele pasar mucho a los que trabajamos con juegos, que después de investigar un tema a veces nos encontramos que otras personas han trabajado en la misma línea sin nosotros saberlo (¿verdad G.?).

El libro del profesor Gerdes se puede adquirir en versión papel o en versión más barata en pdf en la dirección http://stores.lulu.com/pgerdes, junto con otros muchos libros del autor, varios de ellos sobre puzzles.

Si se quiere buscar más información aconsejamos consultar la página de Henri Picciotto, un profesor de la Urban School y de la Universidad de San Francisco. En ella tiene un apartado para este puzzle que él llama Supertangrams y en donde pueden encontrarse en pdf cuatro cuadernillos de actividades que se pueden descargar gratis. La dirección es:
www.picciotto.org/mathed/puzzles/supertangrams/index.html
De esos cuadernillos hemos tomado prestadas las figuras no geométricas que hemos incluido en el artículo. En su página, el profesor Picciotto, tiene muchas otras entradas interesantes sobre diversos puzzles y actividades para matemáticas.

En otras páginas, los poliábolos reciben el nombre de *polytans* como citamos en el artículo en la página de Vicher del que aconsejamos visitar su muy completa página de puzzles en http://www.vicher.cz/puzzle/index.html.

En la página:
http://mitglied.lycos.de/polyforms/polytans/start.html podemos encontrar figuras hechas con poliábolos. En concreto podemos encontrar rectángulos de distintas dimensiones y todos los tetrábolos construidos a escala 3.

Si nos atrevemos a continuar más allá de los tetrábolos, en la página siguiente tenemos figuras realizadas con poliábolos superiores:
www.geocities.com/alclarke0/PolyPages/Polyaboloes.htm

Existen multitud de páginas más con referencias a estos puzzles para quien quiera profundizar, pero tampoco queremos alargar el texto, por suerte tenemos google.

JUEGOS ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

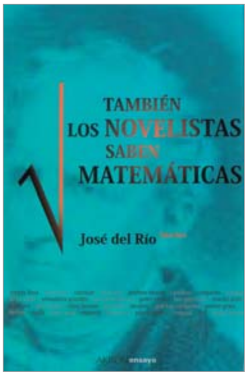
Fernández-Aliseda, A.; Hans, J. A. y Muñoz, J. (2004): Geometría entretenida, *Epsilon,* 60, pp. 471-478.

Gardner, M. (1984): *Festival mágico-matemático*. Madrid: Alianza Editorial.

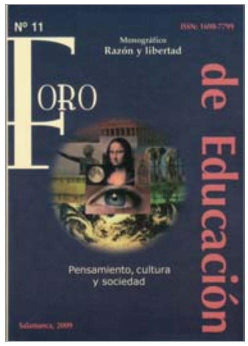
Grupo Alquerque (2001): Hexamantes, *Suma*, 38, pp. 103-105.

Este artículo fue solicitado por SUMA en enero de 2010 y aceptado en marzo de 2010 para su publicación.

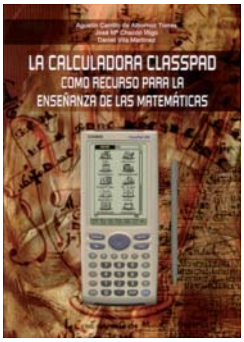
Publicaciones recibidas



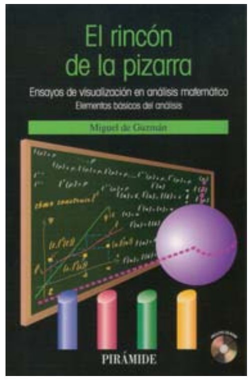
TAMBIÉN LOS NOVELISTAS SABEN MATEMÁTICAS
José del Río
Editorial Akrón
Astorga, 2010
ISBN: 978-84-92814-17-6
256 páginas



FORO DE EDUCACIÓN
Nº. 11 2009
Salamanca
ISSN: 1698-7799



LA CALCULADORA CLASSPAD
Agustin Carrillo Albornoz
División didáctica de Casio
Flamagas - SAEM "Thales"
Sevilla, 2010
ISBN: 9978-84-937577-0-0
296 páginas



EL RINCÓN DE LA PIZARRA
Miguel de Guzmán
Ediciones Pirámida
Madrid, 2010
ISBN: 978-84-368-2353-0
316 páginas

Convegno Nazionale N. 24 *Incontri con la Matematica*

Matematica ed esperienze didattiche

Castel San Pietro Terme (Bologna)

5 - 6 - 7 novembre 2010

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Direzione: Bruno d'Amore
Organizzazzione dell'evento: Associazione *Incontri con la matematica* con la collaborazione dell'assessorate alla cultura del comuni di Castel di San Pietro Terme e di Formath

Per avere ulteriori informazioni, ci si può rivolgere a:
Carla Bernardoni, Ufficio Cultura
Comune di Castel San Pietro Terme, Piazza XX Settembre 3
40024 Castel San Pietro Terme BO
Tel. 051/6954198 Fax 051/6954180 feriali ore 8.30 - 13.30
e-mail: cultura@cspietro.it; silvia.sbaragli@infinito.it
siti: http://www.dm.unibo.it http://www.cspietro.it http://www.dm.unibo.it/rsddm