

Pasatiempos matemáticos en la prensa

Antonio Fernández-Aliseda [C.E.P. de Castilleja] Sevilla

Juan Antonio Hans [C.C. Santa M^a de los Reyes] Sevilla

José Muñoz Santonja [I.E.S. Macarena] Sevilla

"Un gran descubrimiento resuelve un gran problema,
pero en la solución de todo problema hay cierto descubrimiento".

G. Polya

"A pensar se aprende pensando. A pensar bien se
aprende pensando mucho, bien y mal".

Miguel de Guzmán

RESUMEN

La resolución de problemas es la piedra angular de la educación matemática en niveles no universitarios. Su introducción en la clase es siempre difícil. Existen recursos como los problemas de ingenio, los juegos de estrategias o los pasatiempos usuales de los medios de comunicación que utilizan los mismos procedimientos que la resolución de problemas. En este artículo se plantean las similitudes entre la resolución de problemas y de pasatiempos y la viabilidad de su introducción en las aulas desde los primeros niveles hasta bachillerato. También se proponen pasatiempos de tipo numérico.

ABSTRACT

The solving of problems is the corner-stone of mathematical teaching at non- University levels. It is very difficult to introduce them in the classroom. There are resources as creativeness problems, strategy games or normal pursuits found in the media, that use the same procedures as the solving of problems. In this article the similarities between the solving of problems and pursuits are seen as well as their viability in their introduction in the classrooms from the beginning until bachelierato. There are also numerical pursuits.

INTRODUCCIÓN

Todo el mundo, en algún momento de su vida, ha tenido en sus manos uno u otro pasatiempo, desde crucigramas a jeroglíficos, pasando por un amplio abanico de modalidades. Desde muy pequeños nos entretenemos resolviendo pasatiempos, comenzando por encontrar las diferencias entre dos figuras y continuando con los de trazar segmentos siguiendo una serie numérica para

obtener una silueta. Más tarde resolvemos laberintos, sopas de letras y, conforme nuestro vocabulario y conocimientos se amplían, crucigramas y pasatiempos numéricos. Y llega un momento en que no recordamos cómo empezó el proceso de resolución de estas actividades; nos hemos acostumbrado tanto a ellos, que nos vemos con fuerzas para afrontar otros retos sin más que leer las instrucciones y tener un poco de tiempo. Los pasatiempos forman parte del curriculum no escolar que todos desarrollamos, con más o menos habilidad, a lo largo de nuestra existencia.

Los viajes y las vacaciones son los momentos en que mayor es la predisposición a resolver pasatiempos. Sin embargo, son propuestas que presentan un desafío y obligan a un ejercicio mental, y que, por tanto, pueden llevarse a las aulas como recurso educativo, además fácilmente.

¿DÓNDE SE PUEDEN ENCONTRAR?

En casi todas los periódicos y bastantes revistas, no sólo de España, aparecen secciones de pasatiempos. Sirva como ejemplo algunos de los que nosotros hemos encontrado: Periódicos (ABC Pasatiempos, El País Pasatiempos, El Correo de Andalucía, Diario de Sevilla...); Revistas especializadas en pasatiempos (QUIZ, CÁBALA, LOGIC...); Revistas mensuales (QUO, Muy Interesante, Mundo Científico, MUFACE, Tráfico...); y de forma esporádica (Lecturas, Semana, Mujer Hoy, Teleprograma...).

No todos los pasatiempos se pueden usar matemáticamente, pero si se tiene un poco de paciencia es posible hacerse con una amplia y variada colección que abarque casi todos los bloques de conocimientos que impartimos en el área de Matemáticas, desde la educación infantil a secundaria, e incluso algunos temas de bachillerato.

CARACTERÍSTICAS

Dada la gran variedad de modelos distintos de pasatiempos son muchos los aspectos didácticos y matemáticos que se pueden resaltar, pero como norma general podemos destacar los siguientes:

- Son motivadores.
- Constituyen un recurso muy barato, con gran variedad y cantidad de materiales.
- Se pueden usar dentro del aula y también fuera (Semanas culturales, Gymkhanas, Revistas, Concursos...).
- Son un elemento frecuente y aceptado en la vida cotidiana (si aparecen en los periódicos es porque serán interesantes para los lectores, pues si no desaparecerían).
- Divierten.
- No se necesitan conocimientos matemáticos muy profundos. Lo que no quiere decir que sean fáciles.
- Desarrollan procedimientos de la resolución de problemas.

Como esta última característica de los pasatiempos nos parece fundamental vamos a detenernos un poco en ella para aclarar su importancia y algunos términos. Después volveremos a retomar los pasatiempos para relacionarlos directamente con la resolución de problemas.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

A lo largo de nuestra existencia, y no solamente en clase de Matemáticas, una de las acciones que más frecuentemente realizamos es resolver problemas; que no siempre son desagradables, pues pueden ser hasta entretenidos, y desde luego es satisfactoria su resolución.

El proceso mental que ponemos en marcha cuando intentamos resolver un problema de nuestra vida cotidiana tiene muchos aspectos relacionados con las Matemáticas. Por tanto es deseable que desde nuestras clases preparemos a los alumnos para realizar estas tareas.

Los estudios sobre la resolución de problemas humanos y los complejos mecanismos internos que se ponen en funcionamiento comienzan en los años cincuenta del siglo pasado. En el campo matemático no es hasta la década de los setenta cuando se comienza a trabajar de una forma sistemática, aunque el matemático húngaro George Polya (1887-1985) publicase su primer libro al respecto ("Cómo plantear y resolver problemas") en 1945.

Durante muchos años ha sido el tema de moda de la didáctica de las Matemáticas, e incluso los influyentes N.C.T.M. norteamericano (Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas) y A.T.M. inglesa (Asociación de Profesores de Matemáticas) han planteado que debería ser el objetivo principal de la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas.

La resolución de problemas es un tipo de aprendizaje matemático, como lo son la memorización, el aprendizaje algorítmico o el conceptual.

¿QUÉ ES UN PROBLEMA?

La expresión problema es, en general, bastante ambigua; cada persona tiene una definición, y seguramente muchas de ellas muy diferentes. Sin embargo, se ha producido un abuso del término por parte de los profesores de Matemáticas en el sentido de llamar problema a los ejercicios con enunciado, que hace que cualquier actividad que contenga más palabras de "calcula", "realiza", "resuelve"... sea considerada, sobre todo por los alumnos, como un problema, cuando en realidad no son más que ejercicios.

Los ejercicios suelen plantear situaciones muy parecidas a las vistas en clase, y, por tanto, se resuelven utilizando reglas ya ejemplificadas. Resolver ejercicios es importante en el aprendizaje de las Matemáticas, pues facilita la comprensión de los conceptos, sus propiedades y desarrolla procedimientos que luego necesitaremos aplicar para resolver problemas.

Definiciones de problema (matemático) hay muchas. Una bastante sencilla es la de Hudgins: Un problema es cualquier situación que plantea dificultades para las que no se poseen soluciones hechas.

Es verdad que lo que para una persona es un problema puede ser un ejercicio para otra, pues depende del nivel de desarrollo que ambas tengan en esa temática. Un enunciado del tipo "Un apar-

camiento tiene 1.000 plazas, de las cuales un cuarto están ocupadas, ¿cuántas plazas hay libres en el aparcamiento?", es un problema para un alumno de segundo ciclo de Primaria, y, sin embargo, es un ejercicio simple de dividir para un alumno de bachillerato.

Los ejercicios se suelen resolver aplicando procedimientos rutinarios; los problemas utilizando estrategias (heurísticos), normalmente más de una.

FASES DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

El proceso de resolver un problema ha sido dividido por los investigadores en fases, y pueden encontrarse algunas diferencias según los autores. Polya distingue las siguientes:

- **Comprensión.**

Se trata de entender bien el problema y sus partes. ¿Cuáles son los datos?, ¿qué se busca?, ¿cuáles son las condiciones?...

- **Planificación.**

Es la concepción de un plan. Se busca información para elaborar una estrategia que lleve a la resolución.

- **Ejecución.**

Se desarrolla el plan.

- **Revisión.**

Es la visión retrospectiva, donde se comprueba si la solución es correcta o tiene sentido, si se puede resolver de otra forma, si tiene más soluciones...

Hemos de tener en cuenta que no existen fronteras perfectas entre las fases y su recorrido no es secuencial sino que se produce un movimiento entre ellas.

HEURÍSTICO

Es cualquier invención, técnica, regla de manejo, etc. que ayuda en la resolución de problemas. (J. Kilpatrick).

Listas de heurísticos referidos a las distintas fases hay muchas. La siguiente no pretende sino recoger, a modo de ejemplo, algunos de ellos.

HEURÍSTICOS DE LA FASE DE...			
Comprensión	Planificación	Ejecución	Revisión
▶ Leer y entender bien. ▶ Organizar la información. ▶ Experimentar. ▶ Expresar en otros términos. ▶ ...	▶ Simplificar. ▶ Tantear. ▶ Razonar al absurdo. ▶ Considerar el problema resuelto. ▶ Descomponer el problema. ▶ Conjeturar. ▶ Hacer gráficos, dibujos, esquemas... ▶ ...	▶ Orden. ▶ Precisión. ▶ ...	▶ Ver si la solución es razonable. ▶ Comprobar que se usan todos los datos. ▶ Generalizar. ▶ ...

Todos estaremos de acuerdo en que estas, y muchas otras, son técnicas que nuestros alumnos deberían conocer y utilizar; sin embargo, la mayoría de las veces proponemos actividades que son meros ejercicios rutinarios, y con dificultad damos un paso hacia la incorporación de la resolución de problemas como elemento importante de nuestra actividad docente.

Hemos de reflexionar que el abuso de operaciones rutinarias adormece el interés de los alumnos e impide su desarrollo intelectual, mientras que si se plantean problemas adecuados a sus conocimientos (y en caso necesario se les ayuda en su resolución) se despierta su curiosidad y se progresa intelectualmente.

Pero también es cierto que no es fácil conseguir que la resolución de problemas esté presente constantemente en nuestras clases. La presión del curriculum, la desmotivación de los alumnos, la diversidad de niveles e intereses... son factores que frenan, y a veces imposibilitan, su incorporación. Los pasatiempos matemáticos son un recurso que nos puede ayudar a introducir en nuestras clases, en las actividades complementarias e incluso en las extraescolares una cuña en la línea antes comentada.

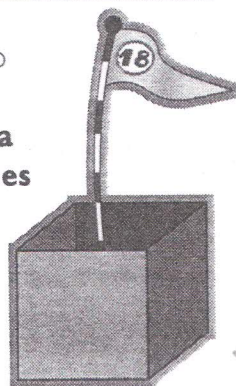
PASATIEMPOS Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

A partir de ahora vamos a mostrar pasatiempos en cuya resolución se utilizan distintos heurísticos como ejemplo de la relación entre la resolución de pasatiempos y la resolución de problemas.

I. LEER Y ENTENDER BIEN

Hoyo final

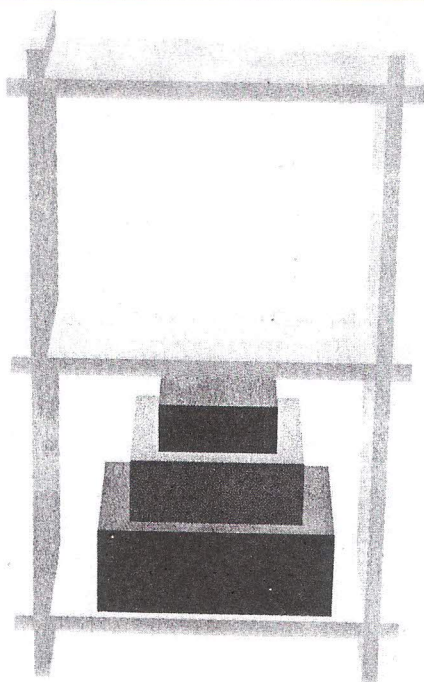
■ El último hoyo es un poco raro.
¿Cuánta arena hay dentro si es un hoyo con forma de cubo de $3 \times 3 \times 3$ centímetros?



Diario Marca, 1998

Tal y como está formulada la pregunta no puede haber arena pues no sería un agujero.

2. EXPERIMENTAR, DESCOMPONER EL PROBLEMA, CONJETURAR, GENERALIZAR



1. Almacén de regalos.

Estos tres regalos están colocados en el orden correcto pero en la estantería errónea. Se trata de moverlos a la estantería de arriba del todo, sin colocar un regalo más grande encima de otro más pequeño. Si un movimiento consiste en trasladar un regalo de una estantería a otra. ¿En cuántos movimientos se puede hacer todo el traslado?

Revista QUO, 1998

Se trata de una adaptación de un juego conocido como "Torres de Hanoi", en este caso para tres elementos.

Se puede ejemplificar con monedas de diferente tamaño. Como el número de regalos es pequeño se llega rápida y fácilmente a la solución; en este ejemplo son necesarios siete movimientos.

Si el número de regalos fuera mayor se podría descomponer empezando por casos más sencillos. Esta propuesta de generalización y búsqueda de una expresión algebraica que

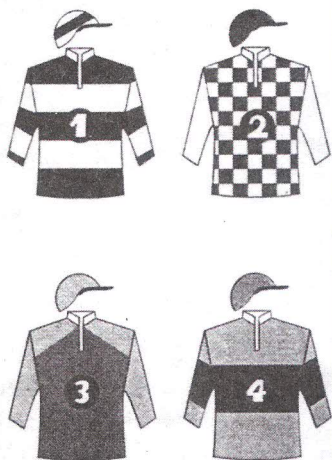
permite calcular el número de movimientos obliga a una profundización interesante para determinados alumnos.

Con los datos que se van obteniendo se puede construir la tabla:

Nº de regalos	1	2	3	4	5	...	n
Nº de movimientos	1	3	7	15	?	...	?

Apuesta segura

■ En una carrera hípica compiten 4 caballos: 1, 2, 3 y 4. Sabiendo que si todos acaban la carrera tienen 24 combinaciones posibles de orden de llegada (sin empates), **¿en cuántas carreras coincidiría el número de orden con el dorsal de al menos uno de los caballos?**



Se podría conjeturar lo que ocurre con cinco regalos. Es probable que las primeras hipótesis sean del tipo "ley de recurrencia" tal como "cada número se obtiene multiplicando el anterior por dos y sumando uno". Esta ley es poco operativa para un número grande de regalos por lo que es aconsejable buscar una expresión que dependa únicamente del número de objetos que hay que trasladar (término general), llegándose a $a_n = 2^n - 1$.

3. ORDEN

Diario Marca, 1998

Basta escribir las 24 formas de ordenar del uno al cuatro (para ello es aconsejable usar un diagrama de árbol) y ver en cuáles va el uno en primer lugar, el dos en segundo, el tres en tercero o el cuatro en cuarto. Son 15 las carreras en que coincidirá el número de orden con el dorsal de al menos uno de los caballos.

INVESTIGACIONES MATEMÁTICAS

Algunos tipos de pasatiempos pueden servir como puente para pequeñas investigaciones matemáticas, como hemos visto en el caso anterior de los regalos.

Este ejemplo, extraído del Diario 16, es también una muestra de que los pasatiempos pueden contener errores (en los enunciados o en las soluciones). A pesar de indicar que son "DOS" las soluciones que se pueden encontrar con seis impactos, en realidad son seis.



Las investigaciones que se pueden realizar a partir de un enunciado permiten un mayor aprovechamiento de la idea que se está trabajando. En nuestro ejemplo posibles propuestas que se pueden hacer, una vez resuelto el pasatiempo original, son:

- Encontrar una solución (que es única) con cinco disparos.
- Encontrar soluciones (hay muchas) con siete disparos, donde se puede partir de las soluciones encontradas con seis disparos.
- Hallar el máximo número de disparos para conseguir 100 acertando siempre en un número.

CLASIFICACIÓN

Ante la variedad de pasatiempos matemáticos que podemos encontrar en la prensa no queda más remedio que intentar clasificarlos para poder usarlos más fácilmente; es cierto que las clasificaciones no son disjuntas y que esto plantea a veces problemas de decisión, pero siempre nos será más cómodo su manejo si los hemos ordenados. Una

primera clasificación que se puede hacer es por niveles educativos: Primaria, Secundaria y Bachillerato, y dentro de ella, siempre que sea posible, podría valer:

- ▶ BLOQUE NUMÉRICO
- ▶ BLOQUE ALGEBRAICO
- ▶ BLOQUE DE SERIES
- ▶ BLOQUE LÓGICO
- ▶ BLOQUE GEOMÉTRICO-TOPOLÓGICO
- ▶ BLOQUE DE COMBINATORIA-PROBABILIDAD
- ▶ JEROGLÍFICOS
- ▶ OTROS PASATIEMPOS

PROPUESTAS

Vamos a comenzar las propuestas con el bloque de Números. Las cuatro primeras se adaptan al nivel de Primaria; incluso la primera de ellas correspondería al primer ciclo.

I. SU JUSTO VALOR

Su justo valor

Asigna a cada personaje el valor que le corresponda para que la siguiente suma sea correcta:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{c} \text{Personaje 1} \end{array} 3 \quad \begin{array}{c} \text{Personaje 2} \end{array} 8 \\
 + \quad \begin{array}{c} \text{Personaje 3} \end{array} 1 \quad \begin{array}{c} \text{Personaje 4} \end{array} 5 \quad \begin{array}{c} \text{Personaje 5} \end{array} 2 \\
 \hline
 5 \quad 9 \quad 8 \quad 5
 \end{array}$$

2. FUERZA MATEMÁTICA

Fuerza matemática



Demuestra a Gastón que hace falta algo más que músculos para resolver el siguiente problema matemático.
Deberás usar los signos $+$, $-$, $\times$ y $\div$ para que las igualdades sean ciertas.

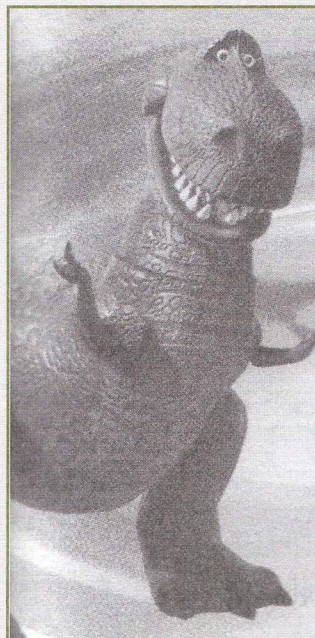
PAÍS
24-11-99

2	2	2	2=0	2	2	2	2=4
2	2	2	2=1	2	2	2	2=5
2	2	2	2=2	2	2	2	2=6
2	2	2	2=3	2	2	2	2=8

El País, 1999

3. DINOSAURIO CALCULADOR

De nuevo insistimos en que hay que tener cuidado con las erratas (o errores) que suelen aparecer en los pasatiempos. En este caso la primera expresión necesita de un corchete que abarcase $[(3 \times 4) + 5 - 2]$, pues si no aparecería la fracción $2/3$, que no permitiría obtener un número natural de la columna de la derecha.



Une cada operación de la columna de la izquierda con el resultado apropiado que corresponda de la columna de la derecha.

$[(3 \times 4) + 5 - 2] : 3 =$	20
$7 + 10 - 5 + 8 =$	8
$24 : 2 + 8 - 12 =$	19
$(3 \times 10 \times 4) : 6 =$	52
$(7 + 7 - 4 + 85) : 5 =$	22
$(6 - 2 + 9) \times 4 =$	5

4. PROBLEMA DE TIEMPO

problema de tiempo

Para cocinar un cierto plato hay que ponerlo en el horno 8 minutos. Para ello, además del horno, se dispone de dos relojes de arena: Uno de 7 minutos y el otro de 3. ¿Cómo se las arreglaría para contar exactamente 8 minutos?

Revista SEMANA

5. IDENTIFICACIÓN

Este pasatiempo permite adaptaciones de las exigencias del enunciado al nivel de los alumnos; así, por ejemplo, se podrían plantear condiciones donde apareciesen conceptos como máximo común divisor, mínimo común múltiplo, números primos o primos entre sí, etc.

IDENTIFICACION



1. El primero más el tercero es igual a ocho.
2. La tercera parte del séptimo es igual a la quinta parte del octavo.
3. El tercero más el quinto es igual a cinco.
4. La diferencia entre el primero y el segundo es

igual a la diferencia entre el segundo y el primero

5. El tercero menos el sexto es igual a uno.

6. El primero menos el tercero menos el quinto es igual a uno.

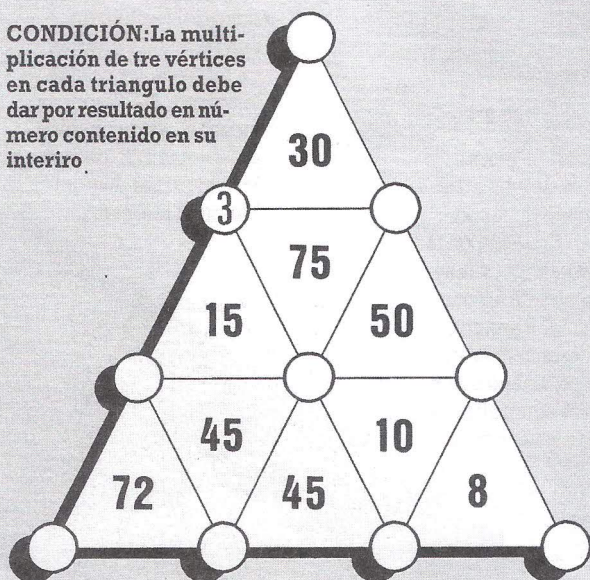
Diario-16, 1988

6. ¿DÓNDE ESTÁN?

¿DONDE ESTAN?

Ocupe los diez círculos con los siguientes números: 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 8 y 9.

CONDICIÓN: La multiplicación de tres vértices en cada triángulo debe dar por resultado en número contenido en su interior.



El Figaro Magazine

FUTURAS PROPUESTAS

En este artículo hemos pretendido hacer una presentación de las posibilidades de los pasatiempos como recurso en la clase de Matemáticas, ver su relación con la resolución de problemas y proponer una serie de ejemplos. Pero como ya hemos dejado entrever, pasatiempos de contenido matemático, o en cuya resolución hay que aplicar procedimientos matemáticos, existen cientos. Nosotros hemos propuesto unos cuantos sobre números, pero hay otras partes de la clasificación que también podrían completarse con ejemplos muy diversos. Si los lectores de Epsilon muestran su interés, este sería el primero de una serie de artículos donde iremos planteando ejemplos para distintos niveles y bloques del curriculum de Matemáticas. Nos gustaría además invitaros a que planteais los pasatiempos propuestos a vuestros alumnos y si recogéis alguna solución especialmente curiosa o imaginativa nos la enviarais para incluirla en estas páginas. Quedamos a vuestra disposición en nuestros correos electrónicos.

Antonio Fernández-Aliseda

aliseda2@teleline.es

Juan Antonio Hans

juanhans@teleline.es

José Muñoz

josemunozsantonja@hotmail.com

BIBLIOGRAFÍA

CALLEJO, M^a. Luz (1994): *Un club matemático para la diversidad*, Ed. Narcea, Madrid.

FERNÁNDEZ CANO, A. y RICO ROMERO, L. (1992): *Prensa y Matemáticas*, Editorial Síntesis, Madrid.

FERNÁNDEZ SUCASAS J. y RODRÍGUEZ VELA, M. I. (1989): *Juegos y pasatiempos*, Síntesis, Madrid.

GARCÍA AZCÁRATE, Ana (1999): *Pasatiempos y juegos en clase de Matemáticas*, Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid, Cantoblanco, Madrid.

GUZMÁN, Miguel de (1986): *Para pensar mejor*, Ed. Labor, Madrid.

MASON, J. BURTON, L. y STACEY, K. (1992): *Pensar matemáticamente*, Ed. Labor, Madrid.

POLYA, George. (1985): *Cómo plantear y resolver problemas*, Ed. Trillas, México. Título original: How to solve it.