

Las pruebas de Estalmat

Antonio Fernández-Aliseda / Juan Antonio Hans / José Muñoz Santonja

En anteriores números de la revista EPSILON se ha dado cumplida información sobre el ilusionante proyecto ESTALMAT (Estímulo del TALento MATemático). En concreto en el pasado número 60 aparecía una detallada descripción de cómo se estaba desarrollando el primer año de este proyecto.

Aunque en este inicio, y dada la magnitud del proyecto a nivel andaluz, sólo se ha desarrollado en Andalucía Occidental, como este año se ampliará a todo el territorio de nuestra comunidad creemos que puede ser interesante para nuestros lectores, especialmente los interesados en presentar a algunos de sus alumnos, conocer ejemplos de pruebas que se han utilizado en años anteriores. Por eso queremos mostrar en el artículo de este número en primer lugar los problemas que se pusieron el año pasado en la primera edición de ESTALMAT Andalucía, comentar sus resultados y proponer ejemplos de años anteriores en otras comunidades, como Madrid, Cataluña o Castilla y León, donde se lleva más tiempo desarrollando este proyecto.

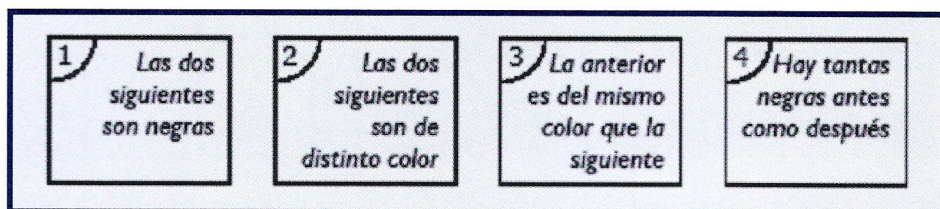
El proyecto comenzó en 1998 en la Comunidad de Madrid; en mayo de 2003 se puso en marcha la extensión del proyecto en Cataluña y en septiembre de ese año se inició el proyecto en Burgos, como anticipo de la comunidad castellano-leonesa. El proyecto comenzó en Andalucía Occidental y Canarias en el 2005.

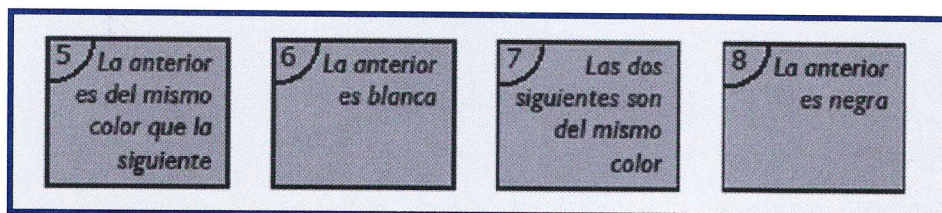
A partir del año 2003 las pruebas comienzan a organizarse conjuntamente. De esa manera en el 2003 las pruebas son comunes en Madrid y Cataluña, en el año 2004 se incorpora Castilla y León y las pruebas de 2005 fueron comunes, al menos en un número significativo de problemas, para todas las comunidades que participan en este proyecto.

Veamos pues las pruebas andaluzas del pasado año.

PROBLEMA N° 1 (TARJETAS)

Las tarjetas 1, 2, 3 y 4 son blancas; las tarjetas 5, 6, 7 y 8 son negras.



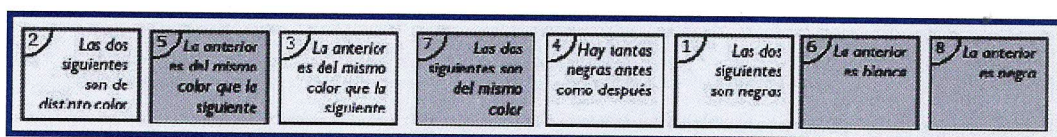


El objetivo final es ordenarlas para que todas las frases resulten verdaderas. Pero antes contesta a las siguientes preguntas.

- ¿Qué tarjetas se pueden colocar en primer lugar?
- ¿Qué tarjetas se pueden colocar en último lugar?
- ¿En qué posiciones puede colocarse la tarjeta 4?
- Finalmente, ordena las tarjetas una detrás de otra para que todas las frases resulten verdaderas.

RESPUESTAS AL PROBLEMA I

- Las únicas tarjetas que se podrían colocar en primer lugar, debido a sus frases, son las tarjetas números 1, 2 y 7.
- En último lugar sólo podrían ir dos tarjetas la 6 y la número 8.
- Como es lógico por la frase, esa tarjeta debe tener dos tarjetas negras delante y otras dos detrás por lo que sus posiciones posibles son la 3ª, 4ª, 5ª y 6ª.
- El orden final de las tarjetas es el siguiente:



PROBLEMA N° 2 (TABLERO)

Tenemos un tablero cuadrado y en cada casilla anotamos un número siguiendo estas instrucciones: el número que escribimos es el menor de los números que indican la fila y la columna de la casilla. La figura que tienes a continuación te da un ejemplo en el caso de un tablero 3 x 3.

	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	2
3	1	2	3

- Tenemos un tablero cuadrado de 5 x 5 (25 casillas).
¿Cuál será la suma de todos los números una vez que

hayamos rellenado todo el tablero con la condición que se ha indicado? Explica una manera de calcular la suma anterior, sin necesidad de sumar uno a uno todos los números.

- b)** Ahora tenemos un tablero de 10×10 (100 casillas). Si lo rellenamos siguiendo las instrucciones ya comentadas, ¿cuál será la suma de todos los números anotados? Explica cómo lo has calculado.
- c)** En el mismo tablero de 10×10 estudia cuál sería la suma si, en lugar de poner el menor de los números que indican la fila y la columna de la casilla, pusiésemos el mayor.

RESPUESTAS AL PROBLEMA 2

- a)** En el apartado primero tendríamos el siguiente cuadro. El resultado de la suma es 55, pero aquí pueden encontrarse distintas formas de hallar la solución.

	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3
4	1	2	3	4	4
5	1	2	3	4	5

Ejemplos de reglas que aparecieron en la corrección son:

- $1 \cdot (5 + 4) + 2 \cdot (4 + 3) + 3 \cdot (3 + 2) + 4 \cdot (2 + 1) + 5 \cdot 1 = 1 \cdot 9 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 1 = 9 + 14 + 15 + 12 + 5 = 55$
- $15 + (15 - 1) + (15 - 1 - 2) + (15 - 1 - 2 - 3) + (15 - 1 - 2 - 3 - 4) = 15 + 14 + 12 + 9 + 5 = 55$
- $5 + (5 + 4) + (5 + 4 + 3) + (5 + 4 + 3 + 2) + (5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 5 + 9 + 12 + 14 + 15 = 55$
- $1 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 9 \cdot 1 = 5 + 12 + 15 + 14 + 9 = 55$

Los dos tableros correspondientes a los apartados b y c serían los siguientes:

b	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3	3	3	3	3	3
4	1	2	3	4	4	4	4	4	4	4
5	1	2	3	4	5	5	5	5	5	5
6	1	2	3	4	5	6	6	6	6	6
7	1	2	3	4	5	6	7	7	7	7
8	1	2	3	4	5	6	7	8	8	8
9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	9
10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

c	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	2	2	3	4	5	6	7	8	9
3	3	3	3	3	4	5	6	7	8	9
4	4	4	4	4	4	5	6	7	8	9
5	5	5	5	5	5	5	6	7	8	9
6	6	6	6	6	6	6	6	7	8	9
7	7	7	7	7	7	7	7	7	8	9
8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	9
9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10

b) Aplicando cualquiera de las reglas vistas en a), por ejemplo la primera:

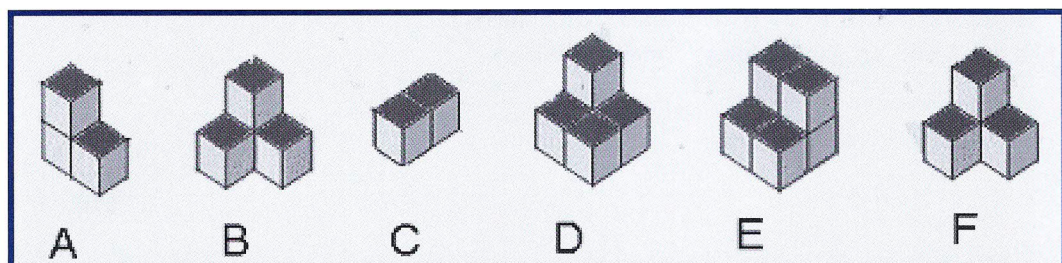
$$1 \cdot (10 + 9) + 2 \cdot (9 + 8) + 3 \cdot (8 + 7) + 4 \cdot (7 + 6) + 5 \cdot (6 + 5) + 6 \cdot (5 + 4) + 7 \cdot (4 + 3) + 8 \cdot (3 + 2) + 9 \cdot (2 + 1) + 10 \cdot 1 = 385$$

c) Una de los ejemplos de respuesta fue:

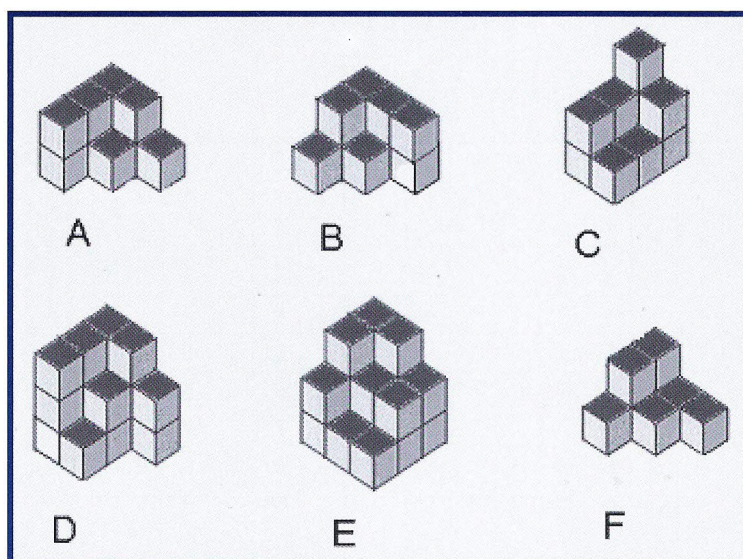
$$10 \cdot 19 + 9 \cdot 17 + 8 \cdot 15 + 7 \cdot 13 + 6 \cdot 11 + 5 \cdot 9 + 4 \cdot 7 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 190 + 153 + 120 + 91 + 66 + 45 + 28 + 15 + 6 + 1 = 715$$

PROBLEMA N° 3 (CUBOS)

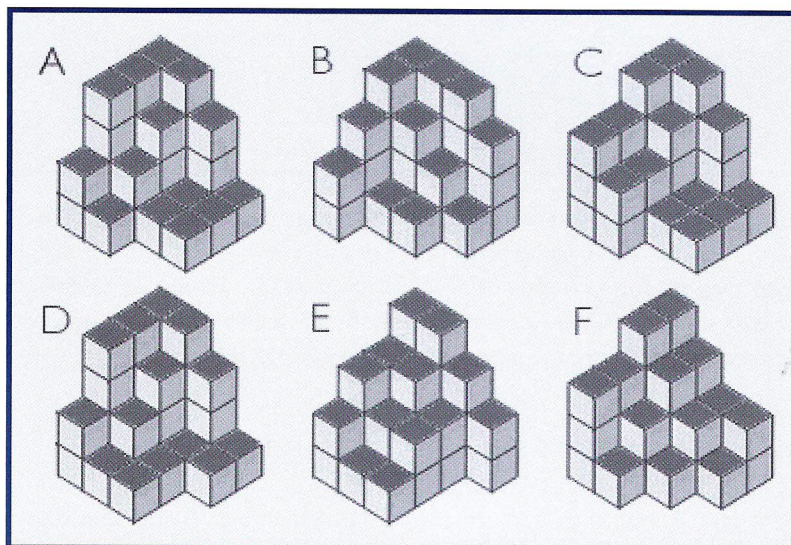
a) Observa las seis piezas siguientes. Elige las parejas de bloques que encajen formando un cubo completo de $2 \times 2 \times 2$.



b) Cuenta el número de cubos que hay en cada uno de los siguientes bloques. ¿Cuáles son los dos bloques que hay que unir para formar un cubo completo de $3 \times 3 \times 3$? En cada uno de ellos, numera con 1, 2 y 3 tres cuadrados que queden pegados al encajar los bloques. Explica cómo has encontrado la solución.



- d) Contesta a las mismas preguntas que en el apartado b) para los bloques siguientes en el caso de un cubo completo de $4 \times 4 \times 4$. No te olvides de explicar cómo has encontrado la solución.



RESPUESTAS AL PROBLEMA 3

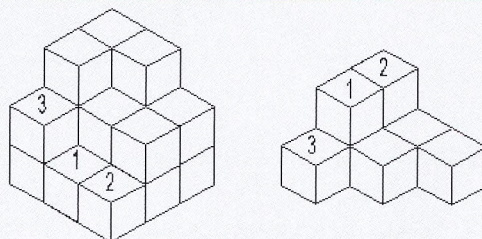
- a) Teniendo en cuenta el número de cubitos de cada pieza y que el cubo final de lado 2 ha de constar de 8 cubitos las posibles parejas son:

1. $A - D = 3 + 5 = 8$,
2. $B - F = 4 + 4 = 8$,
3. $C - E = 2 + 6 = 8$

Ahora se puede comprobar que efectivamente estas parejas encajan correctamente para formar el cubo.

- b) Número de cubos:
A - 10, B - 10, C - 11 ,
D - 17 , E - 19 , F - 8

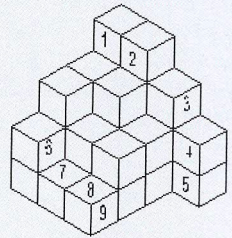
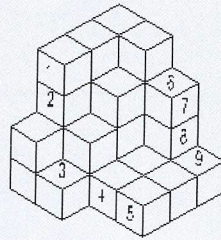
El agrupamiento es entre E y F



Las parejas deben sumar 27 cubos por lo que C queda descartado de entrada. Las parejas posibles serían A-D, B-D y E-F. Las dos primeras son inviables porque con D sólo puede casar con una figura que tenga dos pisos y uno de ellos debe tener siete cubos y tanto A como B tiene tres pisos a partir de la base de siete cubos.

- c) Número de cubos:
 A - 32, B - 32, C - 33
 D - 32, E - 32, F - 31

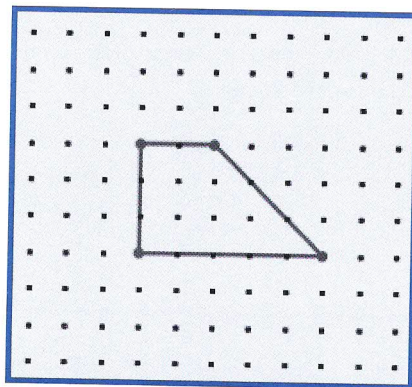
El agrupamiento es entre A y E



En este caso son necesarios 64 cubos por lo que los agrupamientos posibles son A-B, A-D, A-E, B-D, B-E, D-E y C-F. Esta última pareja no es posible pues en la base de C faltan dos cubos y el único par de cubos de pico de F no pueden hacer casar la pieza. En los demás casos se trabaja en el mismo sentido. Los dos cubos que necesita la pieza A para cumplimentar la primera hilera de su base no puede unirse satisfactoriamente nada más que con los de la pieza E.

PROBLEMA N° 4 (NÚMEROS TRAPECIALES)

En este problema consideraremos unos trapezios muy especiales. Tienen que tener dos ángulos rectos y un ángulo de 45° y además sus vértices han de ser puntos de una cuadrícula. Mira el trapecio de la figura: como encierra 18 puntos, contando los que hay sobre los lados, diremos que 18 es un “**número trapecial**”.



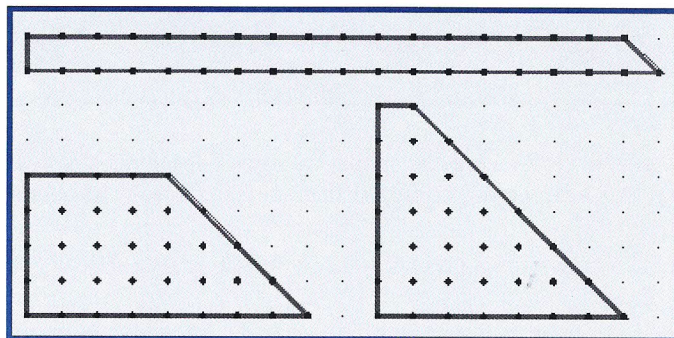
- Haz un dibujo que muestre que 35 es un número trapecial.
- Dibuja todos los trapecios que tienen 18 como número trapecial y justifica que no hay más que los que dibujas.
- Explica por qué cualquier número impar mayor que 3 es un número trapecial.
- Encuentra razonadamente todos los números entre 4 y 50 que **no** sean números trapeciales.

RESPUESTAS AL PROBLEMA 4

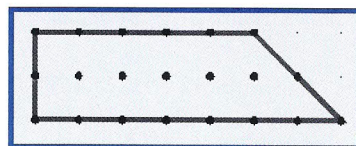
Al ver la construcción deducimos que un número trapecial es suma de al menos dos números naturales consecutivos. Por ello las soluciones de cada apartado se dan como posible suma de esos números.

a) Las soluciones posibles son:

$$\begin{aligned} 35 &= 17 + 18 \\ &= 5 + 6 + 7 + 8 + 9 \\ &= 2 + 3 + 4 + 5 + 6 \\ &\quad + 7 + 8 \end{aligned}$$



b) Aparte del presentado en el enunciado ($3 + 4 + 5 + 6$) sólo hay otra posibilidad $18 = 5 + 6 + 7$



c) Porque todo número impar es suma de dos números naturales consecutivos:
 $5 = 2 + 3$; $7 = 3 + 4$; $9 = 4 + 5$...

d) Por lo anterior los números impares son trapeciales; luego podrán no ser números trapeciales los pares entre 4 y 50. Probando los que se pueden sumar como enteros consecutivos quedan al final como no trapeciales: 4, 6, 8, 10, 16, 28, 32, ya que:

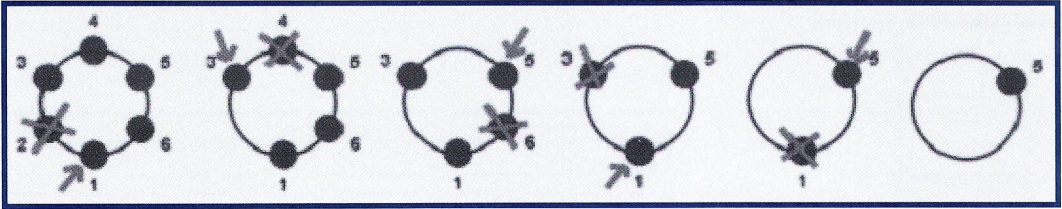
$$\begin{aligned} 12 &= 3 + 4 + 5, \\ 14 &= 2 + 3 + 4 + 5, \\ 18 &\text{ (ya visto),} \\ 20 &= 2 + 3 + 4 + 5 + 6, \\ 22 &= 4 + 5 + 6 + 7, \\ 24 &= 7 + 8 + 9, \\ 26 &= 5 + 6 + 7 + 8, \\ 30 &= 9 + 10 + 11, \\ 34 &= 7 + 8 + 9 + 10, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 36 &= 11 + 12 + 13, \\ 38 &= 8 + 9 + 10 + 11, \\ 40 &= 6 + 7 + 8 + 9 + 10, \\ 42 &= 13 + 14 + 15, \\ 44 &= 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9, \\ 46 &= 10 + 11 + 12 + 13, \\ 48 &= 15 + 16 + 17, \\ 50 &= 11 + 12 + 13 + 14 \end{aligned}$$

PROBLEMA N° 5 (FICHAS SALTARINAS)

Se colocan 6 fichas en círculo y se numeran del 1 al 6 consecutivamente. Ahora, en el sentido de numeración, voy dejando una ficha y quitando la siguiente. Empiezo dejando la ficha 1 y qui-

tando la 2. El proceso continúa hasta que sólo queda una ficha. En la figura vemos que al final del proceso la ficha final es la número 5.



- a) Haz tú lo mismo con 8 fichas en círculo. ¿Qué ficha queda al final?
- b) Si comenzamos con 16 fichas, ¿qué ficha queda al final?
- c) Los números 8 y 16 son potencias de 2. También el número $1024 = 2^{10}$ es una potencia de 2. ¿Sabrías decirnos, con un razonamiento convincente, qué ficha quedaría al final si comienzas con un círculo de 1024 fichas?
- d) Ahora tienes $1026 = 2^{10} + 2$ fichas. ¿Qué ficha quedaría al final? Indícanos las razones de tu contestación.

RESPUESTAS A LAS PRUEBAS 5

- a) Orden en que se tachan

1	2	3	4	5	6	7	8
1		3		5		7	
1				5			

- b) Orden de tachado

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1		3		5		7		9		11		13		15	
1				5				9				13			
1								9							
1															

- c) 1024 es 2^{10} es decir $2^8 \cdot 2^2$, por tanto 2^8 grupos de 4 ya)
como $2^8 = 2^6 \cdot 2^2$; $2^6 = 2^4 \cdot 2^2$; $2^4 = 2^2 \cdot 2^2$ y $2^2 = 4$.
Todos los grupos terminan en el 1

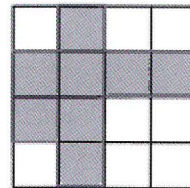
	1	2	3	4
	1		3	
	1			

- d) Si tenemos números de la forma $2^{10} + 2$ podemos ver con un par de ejemplos qué pasa con dos valores más. El número que queda al final es la ficha 5.

1	2	3	4	5	6			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
1		3		5				1		3		5		7		9			
+				5				+				5				9			
				5								5							

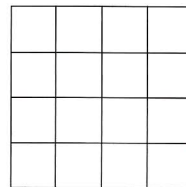
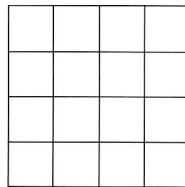
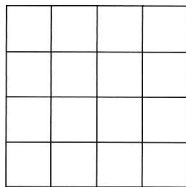
PROBLEMA N° 6 (PERÍMETRO DE REGIONES COLOREADAS)

El área de la región coloreada de la cuadrícula es 200 cm^2 .



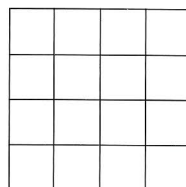
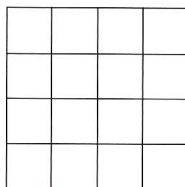
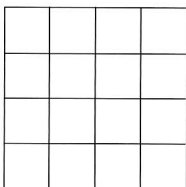
- a) ¿Cuál es el perímetro de la región coloreada?
- b) ¿Crees que si cambias de sitio las casillas coloreadas de tal forma que se dibuje otra región con la condición de que cada pieza tenga como mínimo un lado en común con otra pieza (que no queden sueltas) y que toda la región esté dentro de la cuadrícula, podrás encontrar un perímetro diferente? Pon un ejemplo.

(Cuadrículas para practicar)



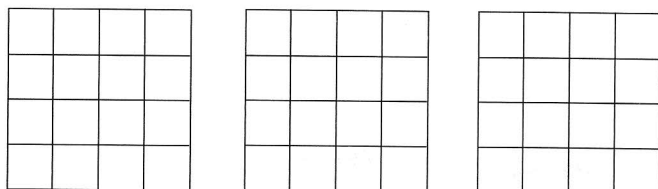
- c) Estudia cuál es el mayor perímetro que puedes conseguir en la situación anterior. ¿Cuál será el menor perímetro posible?

(Cuadrículas para practicar)



- d) ¿Cuántas casillas de la cuadrícula 4x4 deberías colorear, y en qué posición, para conseguir el perímetro máximo de una región coloreada dentro de la cuadrícula?

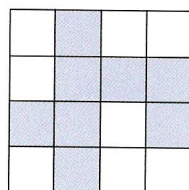
(Cuadrículas para practicar)



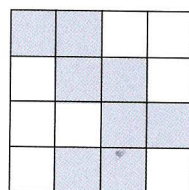
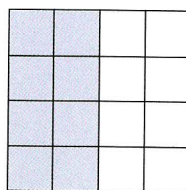
RESPUESTAS A LA PREGUNTA 6

a) área cuadradito = $\frac{200}{8} = 25 \text{ cm}^2$, luego el lado cuadradito = 5 cm y Perímetro = $16 \cdot 5 = 80 \text{ cm}$

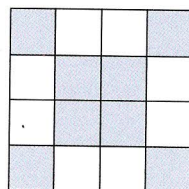
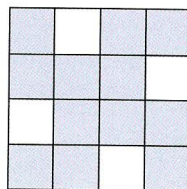
- b) Se pueden encontrar distribuciones que dan perímetros de 90, 80, 70 y 60.
Un ejemplo de 90 es:



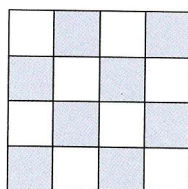
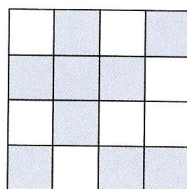
- c) El menor perímetro es 60 y el mayor 90.
Ejemplos de esos perímetros son los siguientes:



- d) El máximo perímetro se consigue con 24 lados.
Ejemplos de soluciones son:



Si se consideran, como en el segundo ejemplo, que los cuadraditos pueden unirse por el vértice, hay otra solución con 26 lados.



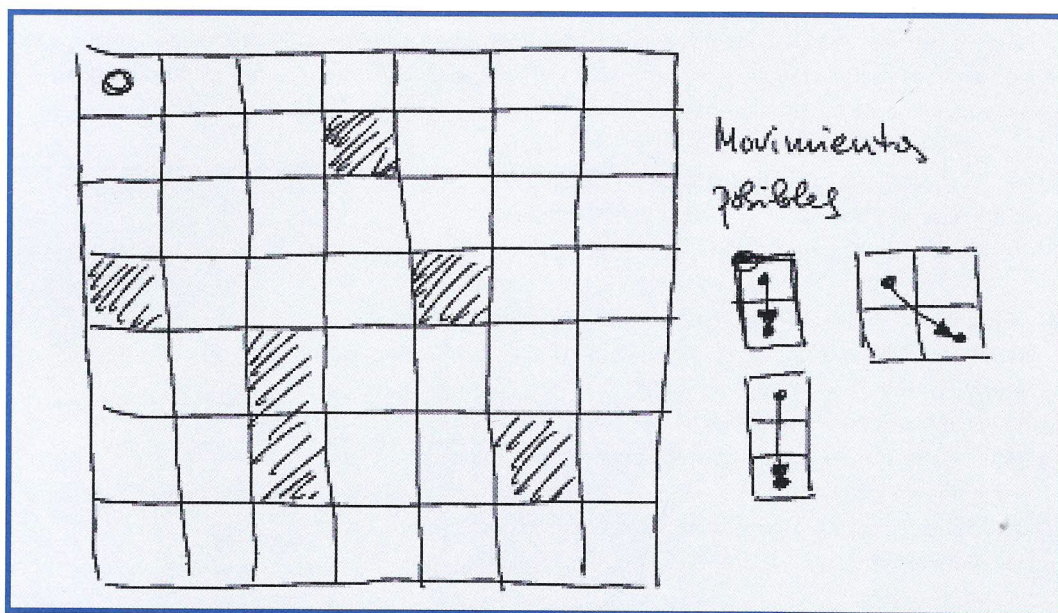
Si se considera la distribución del tablero de ajedrez como otra solución, ¿Cuál sería el perímetro?

Una vez vistos los problemas que se propusieron el año pasado en la prueba realizada en ESTALMAT Andalucía, queremos dejar propuestas algunas de los que han aparecido en otras ocasiones en las convocatorias de ESTALMAT en aquellas comunidades que llevan más tiempo desarrollando este proyecto.

Hasta aquí los problemas de la primera edición de ESTALMAT Andalucía, y a partir de ahora unos ejemplos de años anteriores en otras comunidades.

EL TABLERO (ESTALMAT MADRID 1999)

Tenemos un tablero con unos cuantos bloqueos para los movimientos que se van a proponer abajo, como el que figura aquí



Se pone una moneda en el cuadro señalado. Juegan dos jugadores A y B. Los movimientos permitidos de la moneda son los indicados a la derecha, es decir, o bien un cuadro hacia el Sur, o bien dos hacia el Sur o bien uno en diagonal hacia el Sureste.

Juega primero A. Escoge uno de los movimientos posibles y deja la moneda en la casilla correspondiente. Ahora es el turno de B. Escoge uno de los movimientos posibles para mover la moneda y la deja donde corresponda. Juega A... Pierde el primero que no pueda mover la moneda.

Tú eres A y sales. ¿Cómo te conviene jugar para ganar? ¿Te puedes hacer con una estrategia infalible de modo que haga B lo que haga vas a ganar? ¿O bien te la podrás fabricar si eres B? Indícanos cómo lo vas pensando.

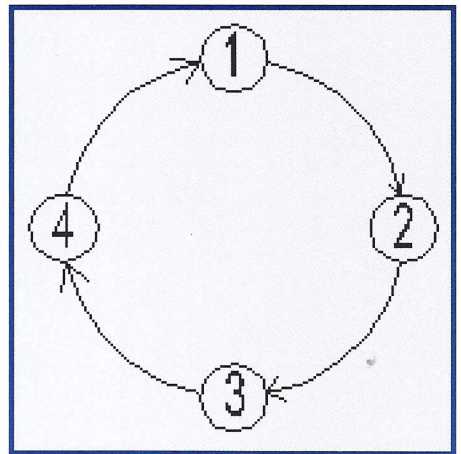
LA ESCALERA (ESTALMAT MADRID 1999)

Imagínate que tienes que subir una escalera de 10 escalones, que lo puedes hacer de uno en uno o, si tienes mucha prisa, puedes optar por subir tres de un golpe. Así por ejemplo, una forma de subir sería de uno en uno, otra sería subir los siete primeros de uno en uno y los tres últimos de golpe, aunque esta forma sería distinta a empezar subiendo, por ejemplo, los tres primeros de golpe y luego de uno en uno. Fíjate que puedes también dar dos saltos de tres escalones, e incluso tres saltos de tres. Como puedes observar, hay diversas formas de subir la escalera con estas restricciones (de uno en uno o a saltos de tres). ¿Podrías decirnos exactamente cuántas formas distintas hay de hacerlo?

LA ANILLA (ESTALMAT MADRID Y CATALUÑA 2003)

Considera los números 1, 2, 3, 4. Ordenamos los cuatro números de todas las formas posibles formando en cada caso una anilla y, en cada caso, multiplicamos cada número por el que le sigue y calculamos la suma de los resultados.

En el dibujo tienes la anilla formada por 1, 2, 3, 4 (después del 4 vuelve a venir el 1) y entonces tendríamos:
 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 = 24$.



- a) ¿Qué anilla hemos de formar con estos cuatro números para que la suma obtenida sea la más grande posible?
- b) ¿Y si consideramos los números del 1 al 5?
- c) ¿Cuál es la suma máxima que conseguiremos con los números del 1 al 10?
- d) ¿Cómo calcularías, en general, la suma máxima que se puede obtener con la colección de números del 1 al n ?

LOS CUADRADITOS (ESTALMAT CASTILLA Y LEÓN 2003)

Tenemos un cuadrado de 1 m de lado. Dividimos cada lado en 100 partes y unimos las divisiones con líneas paralelas a los lados. El cuadrado queda dividido en cuadraditos. ¿Cuántos cuadraditos tenemos? ¿Cuánto mide el lado de cada uno? Si los colocamos unos junto a otros formando una fila, ¿cuánto medirá de largo la hilera?

Contesta a las mismas preguntas si dividimos el lado del cuadrado en 58 partes, o en 155 partes.

¿Podrías dar una regla para calcular la longitud de la fila de cuadraditos cuando dividimos el lado del cuadrado en un n° cualquiera de partes?

RED DE PUNTOS (ESTALMAT 2004)

Tenemos una red de puntos formando pequeños cuadraditos de 1 cm. de lado, como puedes ver en la muestra que acompaña al problema. Esta red sirve para dibujar en ella polígonos y figuras cuyos vértices son puntos de la misma.

1. Dibuja cuatro figuras con la condición de que no contengan, en su interior, puntos de la red. Calcula el área de cada una de las que dibujes.
2. Queremos calcular el área de cualquier figura sin puntos en su interior, en relación con el número de puntos por los que pasa su contorno. ¿Sabrías idear un procedimiento para resolver esta cuestión?

Por último indicar, a todos aquellos que deseen más información, que en la web de la Sociedad Thales (<http://thales.cica.es>) hay un apartado dedicado al proyecto y que en la página <http://www.estalmat.org> hay un acceso a los cinco proyectos Estalmat que actualmente se están desarrollando.

