

Pruebas de ESTALMAT 2006 y 2007

Antonio Fernández-Aliseda Redondo
Asesor del CEP de Castilleja de la Cuesta [Sevilla]
Juan Antonio Hans Martín
[C.C. Sta. María de los Reyes]
José Muñoz Santonja
[I.E.S. Sevilla]

En el número 60 de esta revista aparecía un artículo informando de una nueva actividad en la que se implicaba la sociedad THALES, siguiendo la estela de la idea iniciada en el año 1998 por el profesor Miguel de Guzmán en Madrid. Nos referimos a ESTALMAT (ESTÍmulo del TALento MATemático). Con los años ese proyecto se ha ido consolidando. Si bien en su primer año, 2005, sólo participaron las provincias occidentales de Andalucía, al año siguiente ya contó con todas las provincias andaluzas creándose dos sedes estables, una en Sevilla otra en Granada. Ya en el verano del año 2007 salió la primera promoción de veteranos que durante el curso 2007-2008, y gracias al apoyo de la Universidad de Sevilla, han seguido recibiendo talleres de una forma más esporádica. Aparte de ellos, actualmente 100 alumnos están cursando las actividades sabatinas con auténtica dedicación e implicación.

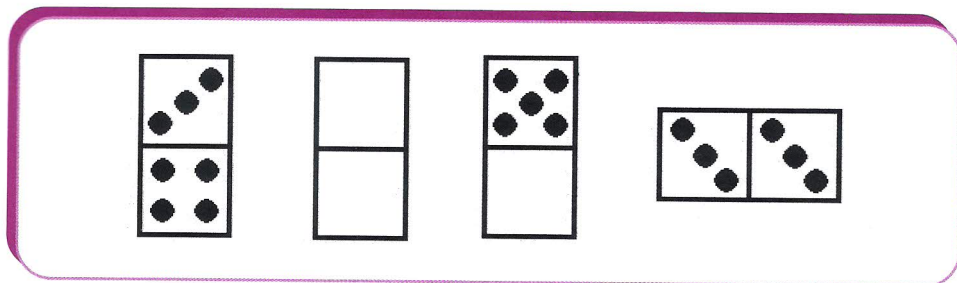
Durante estos tres últimos años, miles de chavales andaluces se han presentado a las pruebas para poder conseguir una plaza en tan ilusionante proyecto. Desde aquí queremos alentar a todos los profesores que tengan algún alumno que destaque en su asignatura de matemáticas, bien por coger las cosas al vuelo, por tener claridad de ideas al explicar sus razonamientos o por proponer unos procedimientos de resolución originales y fuera de la norma, para que los animen a presentarse a las pruebas. Los alumnos más jóvenes tienen varias posibilidades de presentarse, no siendo raro tener dentro del proyecto alumnos que se presentaron un primer año y no fueron seleccionados y, sin embargo, si entraron en el grupo final en el segundo año. Aprovechamos para recordar a cualquier profesor interesado en tener más información que en la página oficial del proyecto <http://www.estalmat.org/> puede encontrar enlaces a los siete proyectos ESTALMAT que se están desarrollando coordinadamente en España (Madrid, Cataluña, Castilla-León, Andalucía, Canarias, Comunidad Valenciana y Galicia).

Para impulsar esa participación queremos recordar aquí los problemas de los últimos años (que también pueden consultarse en la dirección anterior). Desde el año 2003 las pruebas son comunes a todos los proyectos ESTALMAT, aunque algunas varían ligeramente de unas comunidades a otras. Nosotros vamos a presentar las andaluzas que son en las que hemos colaborado. Ya en la entrega de esta sección que apareció en el número 61 de esta revista presentamos los problemas que se propusieron el primer año, ahora queremos en este artículo incorporar los de los años 2006 y 2007. Vamos pues con ellos.

PRUEBAS ESTALMAT DE 2006

PROBLEMA N° 1: DOMINÓ/TRIMINÓ

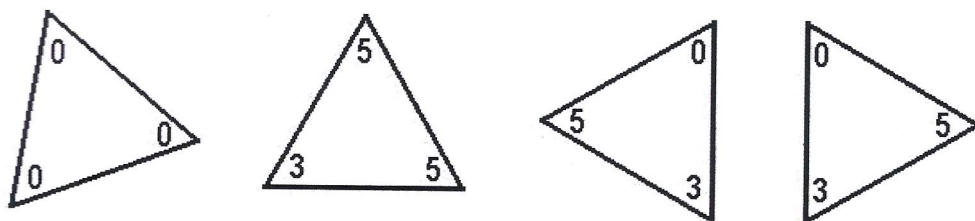
Las fichas del juego del dominó son rectángulos formados a partir de la unión de dos cuadrados. En esos cuadrados hay puntos que pueden variar de cero a seis. Así tenemos la ficha 3-4 (o 4-3 que es la misma), la 0-0 (conocida como blanca doble), la 0-5, la 3-3...



Un juego completo de dominó, donde no hay piezas repetidas, se compone de 28 fichas.

- a) Si quisiéramos hacer un dominó en el que los puntos de cada cuadrado sólo fueran de 0 a 4, ¿cuántas fichas tendría el juego completo?
- b) ¿Y si los puntos fueran de 0 a 10?

El juego del triminó es parecido al del dominó, las fichas son triángulos equiláteros y cada una lleva tres valores (números en vez de puntos), uno en cada vértice, tal como podéis ver en los ejemplos siguientes:



(Dos fichas diferentes)

- c) Dos fichas son iguales si tienen los mismos tres números y están colocados en el mismo orden circular. ¿Cuántas fichas diferentes hay en un triminó que tiene en los vértices números de 0 a 5?

Respuestas al problema n° 1.

Muchos participantes abordaron este problema intentando dibujar todas las posibilidades, incluso en el tercer apartado. La gran dificultad de este camino aparece cuando hay muchas soluciones distintas, como ocurre en los apartados b o c, pues o se sigue un sistema metódico o es normal dejarse algún caso atrás. Por ello es mejor buscar las soluciones siguiendo un razonamiento que no nos obligue a dibujar las soluciones.

a) Cada uno de los cinco resultados puede ir con cualquiera de los otros cuatro, luego serían $5 \cdot 4 = 20$, pero así estamos contando dos veces cada ficha pues tendríamos el 1-2 y el 2-1, por lo que hay que dividir por la mitad, obteniendo 10 fichas. A estas hay que añadir las 5 fichas dobles, es decir, 0-0, 1-1... En total tendríamos 15 fichas.

b) Siguiendo el mismo razonamiento tendríamos 11 fichas dobles y del resto serían

$$\frac{11 \cdot 10}{2} = 55 \text{ luego serían 66 fichas en total.}$$

c) La cantidad de fichas del triminó serían las siguientes: Con los tres valores iguales, 6 triminós; con dos números iguales, $6 \cdot 5 = 30$ (aquí no hay duplicidad, pues es distinto 0-5-5 que 5-0-0); la dificultad viene al considerar tres valores distintos, el recuento sería: fichas con el 0 serían $5 \cdot 4 = 20$, fichas con el 1 pero sin el 0 (para no duplicar) $4 \cdot 3 = 12$, fichas con el 2 (sin 0 y 1) son $3 \cdot 2 = 6$ y por último con el 3 (sin 0, 1 y 2) $2 \cdot 1 = 2$.

En total tendríamos $6 + 30 + 20 + 12 + 6 + 2 = 76$.

PROBLEMA N° 2: EL JUEGO DE LOS CARTONES

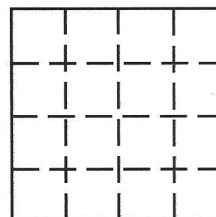
Ocho alumnos de una clase, Aurora, Berta, Clara, David, Ester, Fernando, Gloria y Helia tienen ocho cartones cuadrados, todos de la misma medida, donde han escrito sus iniciales (cuatro iniciales en cada cartón).

A	A	B	B	C	C	D	D
A	A	B	B	C	C	D	D

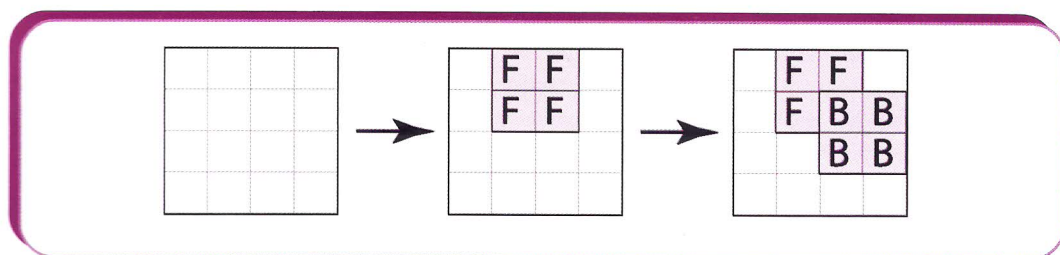
E	E	F	F	G	G	H	H
E	E	F	F	G	G	H	H

Queremos hacer un juego que consiste en colocar sucesivamente los cartones cuadrados en un tablero, también cuadrado, que tiene la longitud del lado doble de la de los cartones:

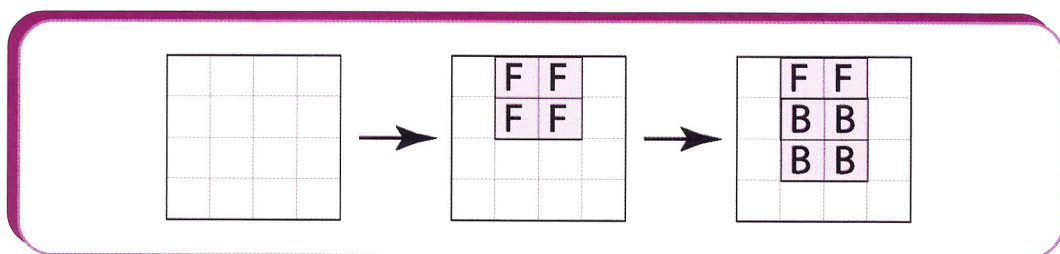
Cada cartón se ha de colocar con los lados paralelos a los del tablero y se ha de hacer de manera que cada cartón que se coloca tape parcialmente el anterior (el segundo ha de tapar una parte del primero, el tercero una parte del segundo —y también si se quiere una parte del primero—, el cuarto una parte del tercero y si se quiere de los anteriores, etc.)



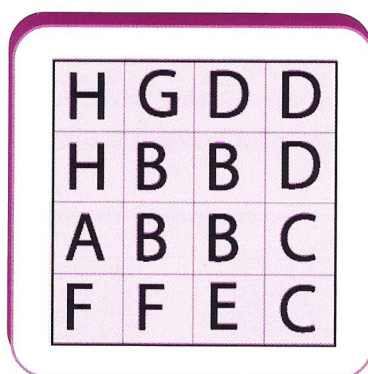
Una posible sucesión de jugadas podría ser ésta:



Y otra sucesión posible es:



Después de haber hecho las ocho jugadas el tablero presenta este aspecto:



- De los ocho alumnos, ¿quién fue el último en jugar?
- Y ¿quién fue el penúltimo?
- ¿Cuál ha sido el orden en el que se han hecho las jugadas?
- ¿Crees que sin jugar las 8 personas, pero siguiendo las instrucciones del juego, se podría llegar a cubrir todo el tablero? ¿Con cuántas jugadas? Da un ejemplo, indica el orden en el que juegan y di cómo queda el tablero.

Respuestas al problema n° 2:

Este fue uno de los problemas que resultó más fácil y las soluciones serían:

- Berta fue la última en colocar su cartón.
- El penúltimo fue David.
- Este es un problema típico en el que el heurístico a emplear es comenzar por el final y rehacer los pasos de atrás hacia delante. En nuestro caso el orden en que han ido colocando los cartones ha sido: Clara, Ester, Fernando, Aurora, Helia, Gloria, David y Berta.
- La respuesta es que con 7 jugadas se puede rellenar el cuadrado con la condición de que el cartón que se ponga siempre tape parcialmente al que se ha puesto en la jugada anterior.

Añadimos dos soluciones posibles y retamos a nuestros lectores a que encuentren el orden en que se han puesto. Queremos avisar que en el segundo caso hay dos posibilidades, según quiénes sean las siete personas que jueguen.

F	F	E	E
F	G	E	E
B	D	A	A
B	D	C	C

C	C	D	D
C	F	D	D
B	F	F	H
B	B	E	H

PROBLEMA N° 3: POLIAMANTES

Un poliamante es una figura formada por varios triángulos equiláteros, todos con lados de la misma longitud, unidos por uno de sus lados. Por ejemplo, con dos triángulos equiláteros se puede formar una sola figura, el **diamante**, y con tres triángulos equiláteros se puede formar también una sola figura, el **triamente**.

Varias representaciones, todas iguales, de ambas aparecen en las Figuras 1 y 2 respectivamente.

Contesta a las siguientes preguntas y justifica las respuestas:

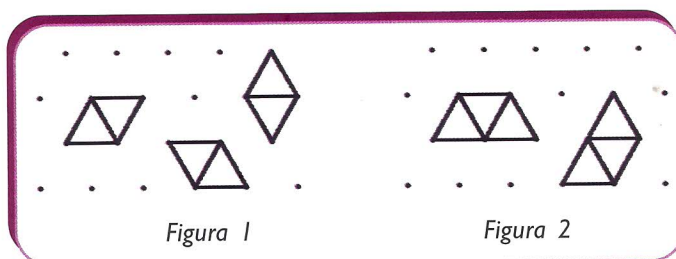


Figura 1

Figura 2

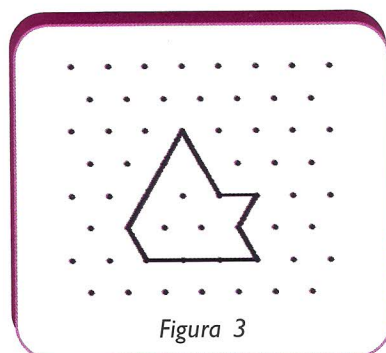
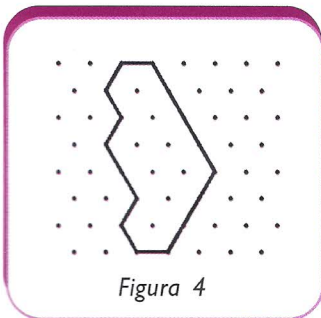


Figura 3

¿Cuántas figuras diferentes podemos formar con cuatro triángulos equiláteros? Las llamaremos los **tetramantes**. Dibuja cada uno de ellos en la trama de puntos que te hemos proporcionado. ¿Tienen todos la misma superficie?

Si el lado del triángulo equilátero mide 1, calcula el perímetro de cada uno de los tetramantes. ¿Cuál o cuáles de ellos son el desarrollo de una pirámide de base triangular? Varios tetramantes se han combinado para formar la Figura 3. Halla una descomposición de los tetramantes con la que se obtiene esa figura.

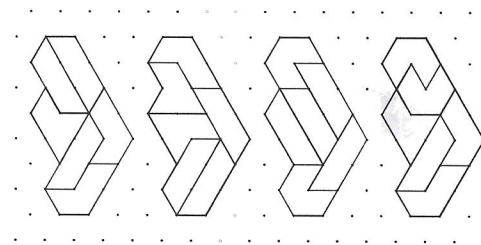
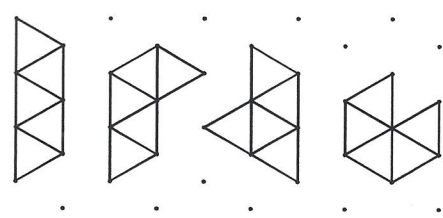
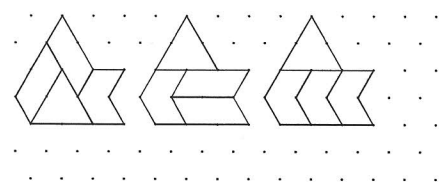
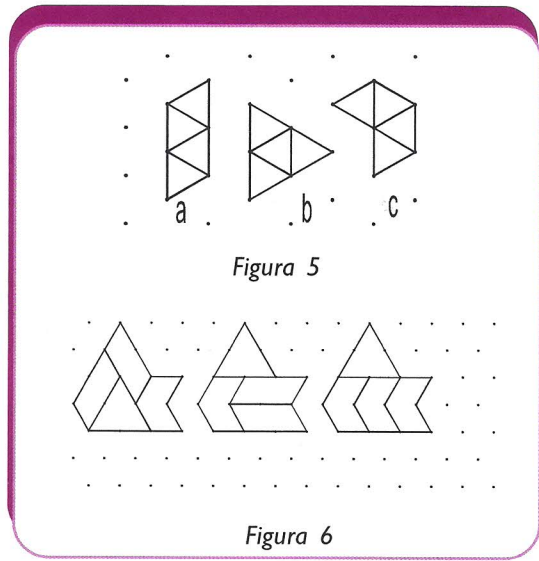


¿Cuántas figuras diferentes podemos formar con cinco triángulos equiláteros? Las llamaremos los **pentamantes**. Dibuja cada uno de ellos en la trama de puntos que te hemos proporcionado. Si el lado del triángulo equilátero mide 1, calcula el perímetro de cada uno de los pentamantes.

Varios pentamantes se han combinado para formar la Figura 4. Halla una disposición de los pentamantes con la que se obtiene esa figura.

Respuestas al problema nº 3

- a) Los únicos tetramantes diferentes aparecen en la figura 5. Como es natural tienen todos la misma superficie al estar formados por cuatro triángulos equiláteros.
- b) Los perímetros de los tres tetramantes valen 6 y desarrollo de una pirámide de base triangular son el a y el b.
- c) En la figura 6 podemos ver varias soluciones al apartado c.
- d) En la figura 7 podemos ver los cuatro pentamantes diferentes que existen. Todos ellos tienen 7 de perímetro.
- e) Por último en la figura 8 podemos ver varias soluciones del apartado e.



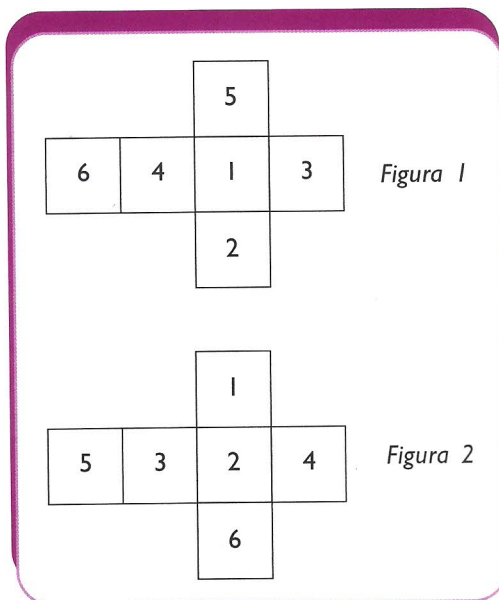
PROBLEMA Nº 4: EL CUBO RODANTE

Se tiene un cubo, con números del 1 al 6, en cada una de sus caras, cuyo desarrollo es el dado en la Figura 1.

La Figura 2 representa también el desarrollo de un cubo. ¿Es este cubo igual al cubo inicial de la Figura 1? Justifica la respuesta.

Se dispone de un tablero con doce casillas del mismo tamaño que las caras del cubo. Se coloca el cubo de la Figura 1 en la casilla A-1 del tablero, siendo la cara superior la ocupada por el número 1. Cada movimiento del cubo consiste en voltearlo sobre una de sus aristas hasta situarlo en una de las casillas vecinas.

Explica por qué la configuración de la Figura 3 no se puede obtener mediante el proceso antes descrito de movimientos del cubo a partir de la posición A-1.



	1	2	3	4
A	1	4	2	1
B	3	3	6	5
C	2	3	2	6

Figura 3

Se han realizado, desde la posición inicial, una serie de movimientos como los descritos en el apartado b) de forma que el cubo de la Figura 1 ha pasado una sola vez por cada una de las casillas del tablero y en cada una hemos anotado el número que figura en la cara de arriba. El resultado obtenido es el que aparece en la Figura 4.

do el número que figura en la cara de arriba. El resultado obtenido es el que aparece en la Figura 4.

Di cuál ha sido el camino que, sobre el tablero, ha seguido el cubo en el ejemplo de la Figura 4, explicando tu razonamiento.

	1	2	3	4
A	1	4	6	3
B	3	3	5	5
C	2	6	6	4

Figura 4

Respuestas al problema nº 4:

En este problema lo curioso fue observar como muchos chavales se construyeron en papel un dado para que les resultara más fácil el estudio.

- Si no tenemos en cuenta la orientación de los números en el dado, los dos dados son iguales. Se puede observar que las caras opuestas son las mismas en ambos y que las contiguas también.
- A la casilla B2 solo puede llegarse desde la B3 y una vez en ella no puede seguirse a ningún sitio. Esa casilla no podría ser la última porque si de la A1 pasamos a la A2

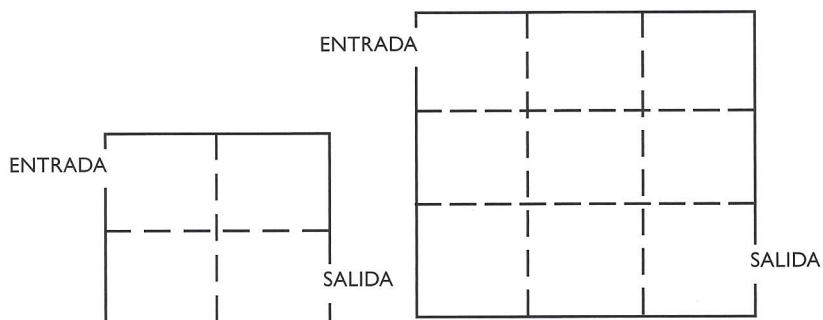
quedaría por cubrir B1, y si pasamos desde A1 hasta B1 quedaría entonces descubierta la A2.

- c) El camino podría ser el siguiente A1, A2, A3, A4, B4, C4, C3, B3, B2, C2, C1, B3. Como tampoco es plan de dejarlo todo cerrado, vamos a invitar a nuestros lectores que encuentren otros caminos viables.

PROBLEMA N° 5: EL MUSEO

Las salas de un Museo son habitaciones cuadradas de 10 metros de lado. Cada habitación está conectada por una puerta con cada una de las habitaciones con las que comparte un lado. La entrada y la salida del Museo están situadas en habitaciones diametralmente opuestas. En los dibujos aparecen dos diseños diferentes de Museo.

El de la izquierda está formado por cuatro habitaciones dispuestas como un cuadrado, diremos que es un Museo 2x2. El de la derecha es un Museo 3x3:



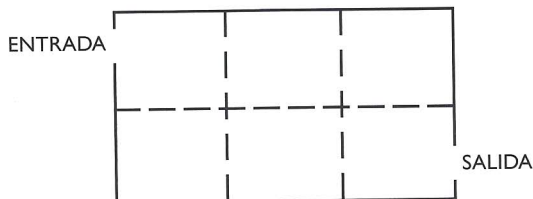
Un visitante del Museo que entra

por la ENTRADA desea visitar cada habitación exactamente una vez y salir por la SALIDA. A estos recorridos los llamaremos **caminos aceptables**.

- ¿Puedes encontrar un camino aceptable en el Museo 2x2? ¿Y en el Museo 3x3?
- Inténtalo en los Museos 4x4 y 5x5 (dibújalos e intenta encontrar caminos aceptables en ellos).
- Seguro que en algunos de los anteriores casos no has conseguido encontrar ningún camino aceptable. Intenta explicar por qué no lo has conseguido. Quizás te ayude pintar de blanco y negro, alternativamente, las habitaciones del Museo (como si fuera un tablero de ajedrez).
- No vas a dibujar un museo 1000x1000, pero te lo puedes imaginar y tratar de ver si hay un camino aceptable o no. Lo mismo podrías hacer con otro museo que sea 725x725. Y lo mismo podrías hacer con un museo que sea de la forma $N \times N$, donde N representa un número cualquiera.
¿Podrías dar una regla general que nos permita decidir si en un Museo cuadrado $N \times N$ vamos a poder encontrar un camino de esos o no?
- Planteamos ahora la misma pregunta, pero para Museos rectangulares. Entrénate, por ejemplo, con Museos 5x6, 4x6, 5x7, etc.

Imagínate un museo de dimensión 400x600, o bien 5000x7000, ¿podrías encontrar un camino aceptable? Lo mismo podrías hacer con un museo que sea de la forma $N \times M$,

donde N es un número cualquiera y M es otro número cualquiera distinto de N . Intenta contestar a la siguiente pregunta: ¿qué condiciones han de cumplir N y M para que en un Museo $N \times M$ haya con seguridad un camino de éstos?



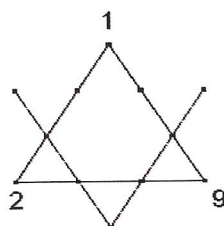
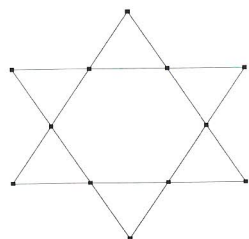
Comentarios sobre la solución:

Los alumnos que se pusieron a resolverlo no tuvieron muchas dificultades con los primeros apartados. Fácilmente vieron que los museos de 2×2 y 4×4 no tenían solución mientras que los de 3×3 y 5×5 sí. Fue curioso que la pista de que dibujaran los cuadros como un tablero de ajedrez, en lugar de ayudar, confundió a bastantes alumnos. En general hubo muchos que llegaron al razonamiento de que una de las dimensiones del museo debía de ser impar para que tuviese solución el recorrido propuesto.

PROBLEMA N° 6. JUGANDO CON LAS ESTRELLAS

Se considera la **estrella de David**, formada con dos triángulos equiláteros que se cortan como los de la figura, determinando 12 puntos de corte (seis vértices y seis puntos de intersección de lados). Un juego consiste en construir una estrella mágica colocando en dichos puntos los números del 1 al 12 sin repetir ninguno, con la condición de que los cuatro que están sobre cada lado sumen siempre lo mismo.

- Encuentra una solución en la que sobre los tres vértices de uno de los triángulos estén los números 1, 2 y 9, con la condición de que los cuatro que están sobre cada lado sumen 26.
- Encuentra otra solución sabiendo que la suma de los números colocados en los seis vértices sea también 26 y que, además, los números colocados en los vértices de uno de los triángulos son impares y suman lo mismo que los colocados en los vértices del otro triángulo.
- En cualquier solución de la estrella mágica la suma de los cuatro números colocados sobre un lado es siempre 26. Explica por qué.
- En cualquier solución de la estrella mágica la suma de los números colocados sobre los vértices de uno de los triángulos es igual a la suma de los números colocados sobre los vértices del otro triángulo. Explica por qué.



Respuestas al problema nº 6

a) Aunque en un principio parece más complicado, el apartado I no lo es tanto. En el lado que une los vértices 1 y 2, al tener que sumar 26 los otros números deben ser el 11 y el 12, y en la línea que une el 1 con el 9 los números que faltan deben sumar 16 y eso sólo es posible con 10 y 6. A partir de ahí se obtiene la solución. En la figura 9 podemos ver dos soluciones, ¿existe alguna más?

b) En la figura 10 hay dos soluciones al problema planteado en b, dejamos otras soluciones para que nuestros lectores se entretengan buscándolas.

c) Si llamamos S_T a la suma de los valores colocados en todas las líneas y S_L a la suma de los valores de una línea, teniendo en cuenta que cada valor se cuenta doble pues aparece en dos líneas, tenemos: $S_T = 2 \cdot (1 + \dots + 12) = 156$. Por otro lado $S_T = 6 \cdot S_L$ (pues todas las líneas suman lo mismo). Por tanto $S_L =$

d) La suma de las tres líneas del triángulo de vértices a_1, a_2, a_3 es $2 \cdot (a_1 + a_2 + a_3)$ + la suma de los valores del hexágono interior. La suma de las tres líneas del triángulo de vértices b_1, b_2, b_3 es $2 \cdot (b_1 + b_2 + b_3)$ + la suma de los valores del hexágono interior. Como los dos triángulos suman lo mismo (pues ambos contienen tres líneas de igual suma), $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$

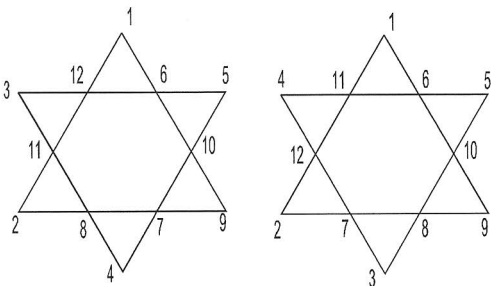


Figura 9

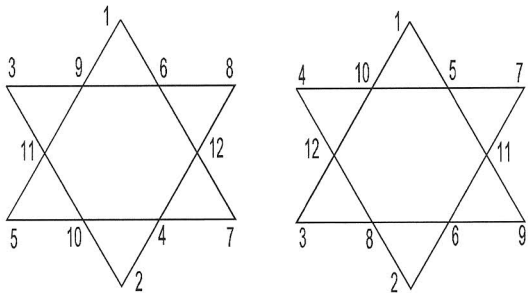
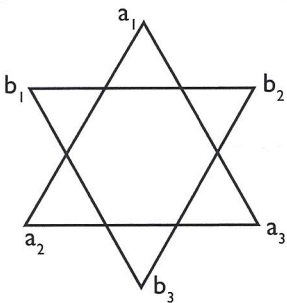


Figura 10



Este problema admite algunas otras cuestiones que proponemos al lector:

- i) ¿Existe alguna solución en la que además la suma de los números situados en las puntas de la estrella también sea 26?
- ii) ¿Existe alguna solución en la que, además de las líneas, sumen también 26 los números que forman el hexágono central?

Ahora vamos a pasarnos a las pruebas del año 2007, pero como este artículo se está alargando en demasía vamos a mostrar solamente los enunciados. Las soluciones pueden encontrarse en

la página web de ESTALMAT-Andalucía en la dirección http://thales.cica.es/estalmat/sites/thales.cica.es/estalmat/files/Prueba_2007-soluciones.pdf

PRUEBAS ESTALMAT DE 2007

1. El juego de las piedras

Se trata de un juego para dos jugadores, Ana y Pedro. Para jugar sólo se necesitan unas cuantas piedras.

Las reglas son muy sencillas: Cada jugador, en su turno puede coger 1 o 2 piedras. Gana el jugador que retira la última piedra que, evidentemente, puede ir acompañada.

Se pide:

- Si hay 5 piedras, encuentra un modo de jugar de Ana de manera que si es la primera jugadora en sacar piedras, esté segura de ganar.
- Si hay 20 piedras, encuentra un modo de jugar de Ana de manera que si ella es la primera jugadora en sacar piedras, esté segura de ganar.
- ¿Qué pasa si en el montón, al comenzar a jugar, hay veintiuna piedras? ¿Y si hay veintidós? ¿Y si, en general, hay un número cualquiera?
- ¿Qué pasa si en el montón hay veinte piedras pero en vez de coger sólo una o dos, se pueden coger una, dos o tres?

Explica claramente cómo has obtenido las respuestas.

2. Las partidas

Tres amigos A, B y C acuerdan jugar un torneo de tres partidas de dados de forma que, cuando uno pierda, entregará a cada uno de los otros dos una cantidad igual a la que cada uno posea en ese momento. Se sabe además que cada uno perdió una partida en el orden siguiente: primero perdió el jugador A, luego lo hizo el jugador B y, finalmente, el jugador C.

Un ejemplo de cómo podría haberse desarrollado la partida se muestra en la siguiente tabla:

	Cantidad de euros del JUGADOR A	Cantidad de euros del JUGADOR B	Cantidad de euros del JUGADOR C
Inicio de la Partida	70	40	20
Después de que pierda el jugador A	10	80	40
Después de que pierda el jugador B	20	30	80
Después de que pierda el jugador C	40	60	30

- a) Completa en la siguiente tabla las situaciones que se tendrían después de cada partida, en este otro supuesto de dinero inicial.

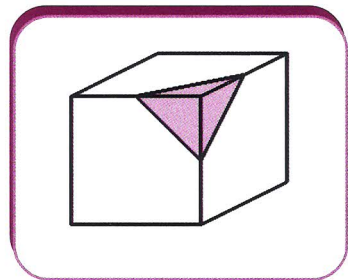
	Cantidad de euros del JUGADOR A	Cantidad de euros del JUGADOR B	Cantidad de euros del JUGADOR C
Inicio de la Partida	60	30	20
Después de que pierda el jugador A			
Después de que pierda el jugador B			
Después de que pierda el jugador C			

Con las mismas condiciones de orden de pérdida de cada partida responde a los siguientes apartados:

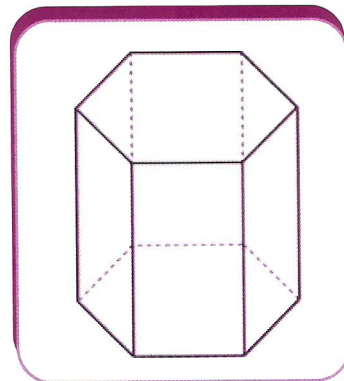
- b) Se sabe que al final del torneo cada uno tenía 24 €, ¿cuánto dinero tenía cada jugador al comienzo?
- c) Se conoce que en otro torneo de las mismas características, el jugador C comenzó con 20 € y al final acabaron todos con la misma cantidad de dinero ¿cuánto tenía cada jugador al comienzo y con cuánto acabaron?
- d) En otro torneo sucedió que se tuvo que suspender en la tercera partida ya que el jugador C no pudo hacer frente a los pagos correspondientes. Describe esta situación con un ejemplo.
- e) Dicen que en una ocasión acabaron todos con la misma cantidad de dinero con la que comenzaron. ¿Es posible que se dé esta situación? Justifica la respuesta y, en caso afirmativo, pon un ejemplo que lo ilustre.

3. Cubo cortado

- a) Uniendo los puntos medios de las aristas de un cubo como se ve en la figura, se obtienen pirámides triangulares. Si construimos una nueva figura geométrica sólida quitando estas pirámides ¿qué polígonos forman las caras del cuerpo resultante? ¿Cuántas caras, vértices y aristas tiene? Describe cómo has llegado a los resultados.
- b) Ahora vamos a hacer una variación, sobre el problema anterior.
En vez de tomar los puntos medios, elegimos los puntos sobre las aristas y situados a un tercio de distancia de los vértices. Resultando, al unirlos, unas pirámides más pequeñas y que no se tocan entre ellas. Si recorramos estas pirámides ¿qué polígonos forman ahora las caras del cuerpo resultante? ¿Cuántas caras, vértices y aristas tiene? Describe cómo has obtenido las respuestas.



- c) Si en vez de un cubo consideramos el prisma hexagonal regular de la figura (las bases son hexágonos regulares) y procedemos como en el apartado a) ¿qué polígonos forman en este caso las caras del cuerpo resultante? ¿Cuántas caras, vértices y aristas tiene? Describe cómo has llegado al resultado.



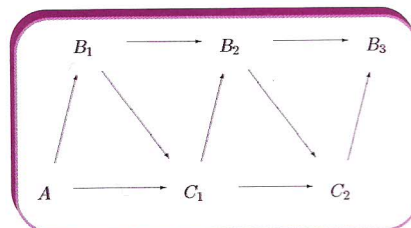
4. Caminos

Se tiene la siguiente estructura: De un punto a otro se consideran los caminos siguiendo la dirección de las flechas. Observa que de A a B_1 hay un solo camino y que de A a C_1 hay dos caminos: AC_1 y AB_1C_1 .

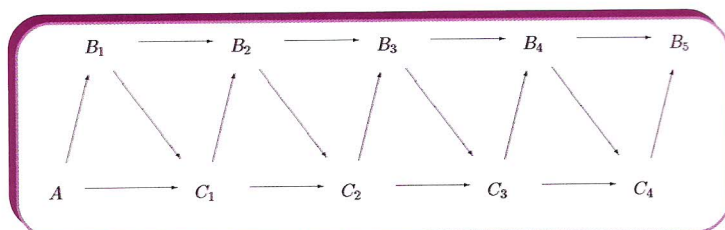
- a) ¿Cuántos caminos hay de A a B_2 ?

- b) ¿Cuántos de A a B_3 ?

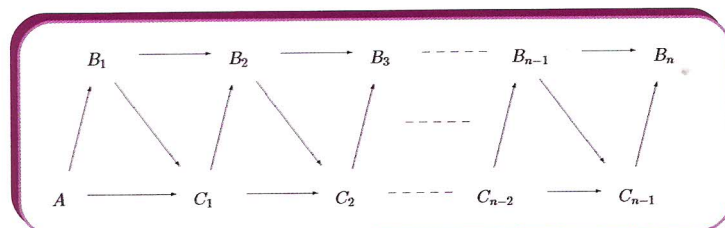
Incrementamos el número de flechas de la estructura hasta obtener la siguiente:



- c) Desarrolla una estrategia que te permita calcular el número de caminos de A a cada uno de los puntos B_1, B_2, B_3, B_4 y B_5 . ¿Cuántos caminos hay de A a B_5 ?



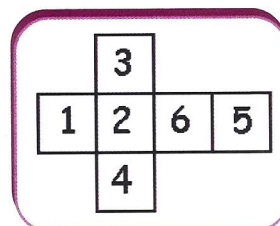
- d) Extiende los resultados obtenidos a estructuras de este tipo con un número arbitrario de puntos B_n . Para $n \geq 6$, ¿cuántos caminos hay de A a B_n ?



5. Dados gigantes

Tenemos ocho dados iguales con las caras numeradas de 1 a 6. Cada uno de los dados tiene el desarrollo plano siguiente:

Con los ocho dados construimos un cubo, que llamaremos "Gran Dado":



- a) Si sumamos todos los números que vemos en las seis caras del "Gran Dado", ¿cuál es la suma más grande que se puede obtener?
- b) En el dado pintado, la suma de los puntos de dos caras opuestas es siempre la misma. ¿Podemos construir un "Gran Dado" de manera que si miramos dos caras opuestas la

suma de todos los puntos que hay en esas caras siempre es la misma? Describe cómo has llegado al resultado.

- c) ¿Podemos construir un “Gran Dado” de forma que la suma de los puntos que hay en cada una de sus seis caras sean los números consecutivos 19, 20, 21, 22, 23 y 24? Razona tu respuesta.

Ahora tenemos veintisiete dados iguales con las caras numeradas de 1 a 6. Con los veintisiete dados construimos un cubo más grande que el anterior, le llamaremos “Mega Dado”.

- d) Si sumamos todos los números que vemos en las seis caras del “Mega Dado”, cuál es la suma más grande que se puede obtener.

6. Rectángulos

Disponemos de una cuadrícula en la que hemos dibujado un cuadrado de 8×8 (es decir de 8 unidades de lado). En la misma cuadrícula recortamos aparte cuatro rectángulos de 3×5 .

- a) Razona dibujando, cómo podrías cubrir parte del cuadrado de 8×8 con los 4 rectángulos, sin que se superpongan y sin necesidad de trocearlos.
- b) Busca todas las parejas de números naturales (a, b) que cumplan que $a + b = 8$ (como por ejemplo $(3, 5)$) y en cada caso explica cómo puedes colocar los cuatro rectángulos de lado a y b sobre el cuadrado de 8×8 , sin que se superpongan y sin necesidad de trocearlos.
- c) Pensando en la zona que queda por cubrir en cada caso ¿puedes encontrar alguna característica que cumpla la suma de las áreas de los cuatro rectángulos respecto al área total del cuadrado de 8×8 ?
- d) Crees que se cumpliría la misma propiedad en el caso de un cuadrado de 9×9 y los cuatro rectángulos de lados que sumen 9?
- e) Sin dibujarlos, explica con cuántas parejas diferentes de números naturales (a, b) que sumen 99 podrías colocar los cuatro rectángulos sobre un cuadrado de 99×99 , sin que se superpongan y sin necesidad de trocearlos.
- f) Pon un ejemplo en el que se vea que no siempre es posible colocar cuatro rectángulos iguales sobre un cuadrado (sin que se superpongan y sin necesidad de trocearlos) aunque la suma de las áreas de los cuatro rectángulos sea menor que el área del cuadrado.

Dejamos estas páginas a disposición de cualquier lector que quiera hacernos llegar a través del correo electrónico sus consultas, sean sobre dudas, variaciones que se le ocurran sobre los enunciados o resoluciones que considere curiosas, bien de ellos mismos o de sus alumnos.