TALLER DE MAGIA Y MATEMÁTICA

"Matemáticas y competencias básicas"
C.P.R. Oviedo
5 – 7 de Julio de 2010

José Muñoz Santonja[1]

NOTA INTRODUCTORIA:
Debido a que el ponente se caracteriza por ser bastante disperso, las cuatro sesiones del taller de magia que se realizaron en estos días se parecen poco unas a otras. En cada sesión se realizaron trucos diferentes según el gusto personal del ponente en cada momento, por eso es complicado hacer un documento que recoja totalmente lo expuesto. Para no hacer excesivamente extenso este material se han intentado agrupar los trucos realizados en varias de las sesiones. Por todo ello no se extrañen si algún truco que se realizó en su sesión no aparece y encuentra otros que no recuerda. En todos los casos se explica el truco realizado y, en aquellos que no es excesivamente complicado, el fundamento matemático que va detrás.

1) Tarjetas mágicas.

Uno de los primeros trucos que realizamos en el taller fue el de adivinar un número que aparecía en una serie de tarjetas. Nosotros lo vimos a partir de un programa en flash, del estilo al que pueden verse muchos en Internet, pero vamos a explicar aquí como trabajar con tarjetas impresas. Este juego es bastante antiguo y puede encontrarse en los libros del gran divulgador ruso de la matemática, Perelman.
Al espectador se le entregan las siguientes tarjetas:

Tarjeta 1

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

Tarjeta 2

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

Tarjeta 3

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

Tarjeta 4

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

Tarjeta 5

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

Tarjeta 6

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

Se le pide que piense un número del 1 al 63 y que le devuelva al mago todas las tarjetas en las que se encuentre el número que ha pensado. Una vez en su poder, el mago sólo tiene que sumar el primer número que aparece en cada una de las tarjetas (que es el menor entre los que hay) para saber qué número había elegido el espectador.

Por ejemplo, si ha elegido el 46, encuentra ese número en las tarjetas 2, 3, 4 y 6 luego sumando los primeros números obtenemos 2+4+8+32=46.

Lo interesante, desde el punto de vista matemático, es cómo están construidas esas tarjetas. Los números se reparten en ellas atendiendo a su escritura en base binaria.

---

[1] Catedrático de Matemáticas en el IES Macarena de Sevilla, actualmente con destino provisional en el IEDA (Instituto de Educación a Distancia de Andalucía). Miembro de la SAEM THALES.

Para saber cómo repartir los números, basta con que escribamos el número en base 2. Para ello, dividimos el número entre 2, el cociente volvemos a dividirlo entre 2, y así sucesivamente hasta obtener de cociente la unidad. En el caso del 46 sería:

46 | 2
0   23 | 2
     1   11 | 2
           1   5 | 2
                 1   2 | 2
                       0   1

Luego $46_{(10} = 101110_{(2}$ la cifra de la derecha corresponde a la primera tarjeta, la siguiente a la segunda tarjeta y así sucesivamente. Si la cifra correspondiente es un 1, el número que estamos trabajando (el 46 en nuestro caso) debe de aparecer en la tarjeta, si es un cero no hay que incluirlo en esa tarjeta. En el caso del 46 vemos que debe aparecer en las tarjetas 2, 3, 4 y 6.

La forma de encontrar el número que nos piden se reduce (utilizando las tarjetas) a pasar el número de su forma binaria a la decimal. Pues

$101110_{(2} = 1{\cdot}2^5+0{\cdot}2^4+1{\cdot}2^3+1{\cdot}2^2+1{\cdot}2^1+0{\cdot}2^0 = 32+0+8+4+2+0 = 46_{(10}$

La notación binaria nos limita también los números que podemos colocar en las tarjetas. Si utilizamos seis tarjetas el número mayor que podemos situar en ellas es
$111111_{(2} = 1{\cdot}2^5+1{\cdot}2^4+1{\cdot}2^3+1{\cdot}2^2+1{\cdot}2^1+1{\cdot}2^0 = 32+16+8+4+2+1 = 63$

Si tuviésemos siete tarjetas podríamos llegar hasta

$1111111_{(2} = 1{\cdot}2^6+1{\cdot}2^5+1{\cdot}2^4+1{\cdot}2^3+1{\cdot}2^2+1{\cdot}2^1+1{\cdot}2^0 = 64+ 32+16+8+4+2+1 =127$

y en general con n tarjetas:

$111\ldots\ldots.111_{(2} = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 2^n - 1$
N

Este truco de adivinar un número utilizando tarjetas, puede hacerse con otro tipo de tarjetas. Las siguientes tarjetas las localizamos en Internet:

Tarjeta 1

1	2	4	5	7	8	10	11	13
14	16	17	19	20	22	23	25	26
28	29	31	32	34	35	37	38	40

Tarjeta 2

2	3	4	5	6	7	11	12	13
14	15	16	20	21	22	23	24	25
29	30	31	32	33	34	38	39	40

Tarjeta 3

5	6	7	8	9	10	22	12	13
14	15	16	17	18	19	20	21	22
32	33	34	35	36	37	38	39	40

Tarjeta 4

14	15	16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29	30	31
32	33	3	35	36	37	38	39	40

La forma de utilizarlas es la misma que antes. El espectador elige un número menor o igual que 40 e indica en qué tarjetas se encuentra y con cuál color, y el mago hace una fácil operación y lo adivina.

En este caso es más difícil que el espectador encuentre el truco, pues no consiste en sumar los números más pequeños que aparecen (como en el caso anterior). Las tarjetas están codificadas en base 3, a la primera le corresponde el $1=3^0$, a la segunda el $3=3^1$, a la tercera el $9=3^2$ y la última lleva asociado el $27=3^3$. Sólo hay que sumar el código si está en negro o restarlo si está en rojo. Así si nos dicen que el número pensado está en rojo en la tarjeta 1, en negro en la 2ª y en negro en la 4ª, el número será $-1+3+27 = 29$.

En este caso el número más grande con 4 tarjetas es 1+3+9+27 = 40. Con 5 tarjetas sería 1+3+9+27+81 = 121 y con n tarjetas sería $\frac{3^n-1}{2}$.

Pero veamos como distribuir los números. Vamos a pasar a base 3 el número 29. Se verifica que $29_{(10} = 1002_{(3}$. Pero el problema es la cifra 2 de las unidades. La forma de arreglarlo es sumar y restar uno a la cifra 2. De esa manera se obtiene 3 y podemos añadir una unidad a la cifra siguiente. Veamos el proceso en las siguientes divisiones:

29 | 3
2   9 | 3
0   3 | 3
0   1

29 | 3
3   9 | 3
-1   0   3 | 3
0   1

29 | 3
0   10 | 3
-1   1   3 | 3
0   1

Luego $29_{(10} = 1002_{(3} = 1011_{(3} = 1\cdot3^3+0\cdot3^2+1\cdot3^1-1\cdot3^0 = 27 +3 -1 = 29$

En la página de Divulgamat, dentro de la sección que coordina el profesor Pedro Alegría, se habla de otras tarjetas basadas en el sistema de numeración de base tres. En este caso, como en el anterior, los números pueden aparecer con dos colores. Como la construcción es distinta permite que con cuatro tarjetas se puedan descubrir números menores o iguales que 80.

Las tarjetas son:

Tarjeta 1								
1	2	4	5	7	8	10	11	13
14	16	17	19	20	22	23	25	26
28	29	31	32	34	35	37	38	40
41	43	44	46	47	49	50	52	53
55	56	58	59	61	62	64	65	67
68	70	71	73	74	76	77	79	80

Tarjeta 2								
3	4	5	6	7	8	12	13	14
15	16	17	21	22	23	24	25	26
30	31	32	33	34	35	39	40	41
42	43	44	48	49	50	51	52	53
57	58	59	60	61	62	66	67	68
69	70	71	75	76	77	78	79	80

Tarjeta 3								
9	10	11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24	25	26
36	37	38	39	40	41	42	43	44
45	46	47	48	49	50	51	52	53
63	64	65	66	67	68	69	70	71
72	73	74	75	76	77	78	79	80

Tarjeta 4								
27	28	29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42	43	44
45	46	47	48	49	50	51	52	53
54	55	56	57	58	59	60	61	62
63	64	65	66	67	68	69	70	71
72	73	74	75	76	77	78	79	80

Basta entregar las cuatro tarjetas a un espectador y que nos indique en qué tarjeta y con que color se encuentra. El código de cada tarjeta es 1ª: $3^0=1$, 2ª: $3^1=3$, 3ª: $3^2=9$ y 4ª:$3^3=27$. Los códigos son los mismos que antes y podemos ver que coinciden con el primer número que hay en cada tarjeta. La única diferencia es que si el número está en negro se suma directamente, pero si está en rojo se multiplica por dos el código correspondiente.

Por ejemplo, el número 61 aparece en negro en la 1ª tarjeta y en rojo en las 2ª y 4ª. El código sería $1+3\cdot2+27\cdot2=1+6+54=61$.

La regla para construir las tarjetas es la siguiente. Convertimos el número a base tres. Por ejemplo el número 75

75	3		
0	25	3	
	1	8	3
		2	2

Basta colocar el número en negro en la tarjeta correspondiente a un resto 1 y en rojo cuando el resto es 2. De esa manera el número 75 no se colocaría en la primera tarjeta (resto 0), se colocaría en negro en la primera y en rojo en las 3ª y 4ª.

2) Una memoria prodigiosa.

Aparte de sus capacidades adivinatorias, otro aspecto del que el mago debe vanagloriarse es el de tener una gran memoria. Para ello nada mejor que utilizar la siguiente tabla.

35	23	80	32	17	46	44	34
22	41	20	81	68	56	61	78
16	59	77	63	50	11	79	75
62	13	37	82	58	57	10	39
9	38	36	26	27	15	72	24
60	48	53	70	14	33	12	73
42	3	71	67	8	51	69	55
50	49	2	31	54	5	29	74
19	7	64	16	1	30	28	18
6	25	4	65	52	40	45	62

El mago llama la atención sobre la desorganización de números que aparecen en la tabla. Indica que hay en total 80 números, pero como aparecen el 81 y el 82 y números como el 50 están repetidos, por lo tanto no están todos los números.

El mago explica que se ha aprendido de memoria la tabla y que puede demostrarlo. La tabla estará proyectada o hay un cartel con los números y se pide a un espectador que salga y tape uno cualquiera de los números, mientras el mago se encuentra de espaldas.

Una vez hecho, el mago se vuelve e inmediatamente indica cuál es el número tapado.

El truco consiste en cómo están distribuidos los números. Nos colocamos en la casilla tachada y contamos en diagonal cuatro casillas y nos fijamos en el número que ocupa la última casilla. Si nos hemos movido hacia arriba de la tabla, al número obtenido hay que restarle 8 unidades. Si nos hemos movido hacia abajo, al último número hay que sumarle 8.

Por ejemplo, si nos han tapado el número 60 (6ª fila, 1ª columna) contamos 4 lugares en diagonal hacia abajo y obtenemos el 52, basta sumarle 8. Si nos movemos hacia arriba obtenemos el 68 al que hay que restarle 8.

				68
60				
				52

Este truco es muy interesante para trabajar con los alumnos pues después de trabajarlo (potenciando la rapidez en el cálculo mental) se puede proponer que los propios alumnos creen sus cuadros de números inventándose la regla que quieren aplicar. Para ello eligen si se mueven en diagonal o en vertical u horizontal, cuántas casillas y qué operación se aplica (suelen salir hasta complicaciones del tipo 2·número+3).

Cuando yo realizo algún espectáculo de magia en un centro educativo, me gusta completar el truco anterior con otro más complicado. Indico que para un mago de mis capacidades aprenderse una serie de números enteros de dos cifras no es un reto importante, y por ello les proyecto la siguiente tabla tomada del maestro Perelman.

Estando de espaldas a la tabla, se le pide a un espectador que elija un número y que indique la columna y la fila en que se encuentra. Con esos datos el mago puede saber el número.

El truco se basa en que cada casilla está codificada.

A la primera columna le corresponde el 20, a la 2ª el 30 y así sucesivamente.

34212	46223	58234	610245	712256
44404	56416	68428	7104310	8124412
54616	66609	786112	8106215	9126318
64828	768112	888016	9108120	10128224
750310	870215	990120	1011025	11130130
852412	972318	1092224	11112130	12132036
954514	1074421	1194328	12114235	13134142
1056616	1176524	1296432	13116340	14136248
1158718	1278627	1398536	14118445	15138354

A cada fila le corresponde su lugar. De esa manera la casilla de la 3ª fila y 4ªcolumna tiene como código el 53. Para encontrar el número se realizan las siguientes operaciones:

- se suman las cifras 5+3=8
- se duplica el número 53·2=106
- se restan las cifras 5–3=2
- se multiplican las cifras 5·3=15

luego el número de esa casilla es 8106215.

Aquí también pueden crearse los alumnos su propio código y, por tanto, números tan grandes como se quiera.

3) Localizar un número por su columna.

Hay una forma de adivinar un número elegido por un espectador, utilizando unas tablas más simples. Incluso puede tenerse como tarjeta con los cuadros por ambos lados y llevarlo en el bolsillo.

En general, se le presenta al espectador el primer cuadro, y se le pide que elija un número e indique en qué columna se encuentra. Posteriormente se le enseña el segundo cuadro y se le pide que busque el número elegido y vuelva a indicar en qué columna se encuentra ahora. Inmediatamente el mago dice cuál era el número pensado.

Los cuadros que se presentan son los siguientes:

Cuadro 1º

6	15	39	17	23	35	11
21	42	2	28	31	8	46
37	5	30	49	12	25	34
10	26	13	38	1	43	16
33	45	22	7	47	19	29
27	9	48	36	20	40	3
18	24	41	4	32	14	44

Cuadro 2º

3	44	11	34	16	46	29
43	25	14	8	19	35	40
32	1	12	31	23	47	20
17	49	36	7	4	38	28
13	30	2	41	39	22	48
9	42	24	5	26	45	15
27	10	6	21	37	18	33

El truco en este caso es muy fácil, los números están colocados como en una matriz, de manera que los elementos que están en la misma columna en el primer cuadro, están colocados en la misma fila en el segundo cuadro. Sabiendo en qué columna estaba en el primero y en qué columna en el segundo, se busca fácilmente. El segundo cuadro, con el fin de despistar un poco, tiene las columnas del primero en orden inverso, es decir, la primera columna del cuadro 1 es la séptima fila del 2º, la segunda columna del 1er cuadro es la segunda fila por debajo, y así sucesivamente.

Así, si un espectador nos dice que en el cuadro 1 el número elegido está en la columna 3, y en el segundo cuadro está en la columna 4, el número será el 41.

Aun con el pequeño truco de la ordenación hay espectadores que localizan el truco, por ello se pueden reordenar las columnas de una manera más complicada siempre que el mago recuerde en qué orden las ha colocado, por ejemplo, la primera en el centro, la segunda debajo, la tercera encima y así se van alternando debajo y arriba hasta llegar al final.

4) Las tres cifras

Este truco lo he encontrado en un libro muy ameno indicado para los alumnos de Secundaria, especialmente de primer ciclo, o quizás último ciclo de Primaria[2]

[2] En la editorial Nivola en su colección Violeta, es la tercera entrega de Mate-Cuentos, Cuenta-Mates de los profesores Joaquín Collantes y Antonio Pérez.

Se le pide a alguien del público (no propenso a equivocarse) que elija tres cifras del 1 al 9 distintas, y que escriba los seis números distintos de tres cifras que se pueden formar con ellas. Después, debe sumar esos números y dividir el resultado entre la suma de las tres cifras. El resultado de la división coincide con un número que el mago habrá previamente escrito en un papel.

Explicación del truco:

Si sumamos los seis números que se pueden construir, es fácil ver que la suma de las unidades, de las decenas y de las centenas valen, en cada caso, $2 \cdot a+2 \cdot b+2 \cdot c=2 \cdot (a+b+c)$. Por tanto la suma de los seis números será:
$100 \cdot 2 \cdot (a+b+c)+10 \cdot 2 \cdot (a+b+c)+ 2 \cdot (a+b+c) =222 \cdot (a+b+c)$.
Por tanto, si dividimos por $a+b+c$ esta claro que el resultado siempre será 222.

a	b	c
a	c	b
b	a	c
b	c	a
c	a	b
c	b	a

Hay otra manera de hacerlo más atractivo y obligar a los alumnos a realizar más divisiones. Se les pide primero que dividan entre 2, insistiendo en que si a alguien le ha dado la suma impar deben repasarla porque está mal. El resultado se divide entre 3 y lo obtenido, por último, se divide entre la suma de las tres cifras. Ahora debe dar como resultado 37.

5) Restar un número múltiplo de 9.

Veamos un truco muy fácil y sin embargo muy atractivo. Se le pide a un espectador que piense en un número de dos cifras, lo multiplique por 10 y le reste un múltiplo de 9, el que él quiera, menor de 90. Al decirle el resultado al mago, éste inmediatamente adivina el número.

El mago lo único que tiene que hacer es quitarle al número obtenido la última cifra, y sumársela a las dos que quedan.

Por ejemplo, si se piensa en el 37, se multiplica por 10 y se obtiene 370, si ahora se le resta por ejemplo el 54 obtendremos 370-54=316, luego el mago al recibir el 316, suma 31+6=37, que era el número pensado.

Como puede apreciarse no depende del múltiplo que se elija pues si en lugar de restar 54 hubiésemos retado 27 tendríamos 370-27=343 y según la regla 34+3=37.

La explicación es muy fácil. Si x es el número pensado y se le resta $9 \cdot a$ (siendo $a<10$), lo que se ha hecho es $10 \cdot x-9 \cdot a$ si sumamos y restamos “a” obtendremos lo siguiente
$10 \cdot x-10 \cdot a+a = 10 \cdot (x-a)+a$

Si quitamos la última cifra del número (que debe ser a la fuerza “a”) y consideramos las dos primeras como un número de dos cifras, es como si dividiésemos por 10 por lo que nos quedaría $x-a$, luego si ahora le sumamos “a”, nos queda el número inicial x.

Pudiera darse el caso de que el número que se le dice al mago sea sólo de dos cifras en lugar de tres (eso ocurre si el número que piensa el espectador es menor que 19 y le resta un múltiplo de 9 grande) entonces basta sumar las dos cifras, siguiendo la explicación anterior.

6) La cifra tachada.

El siguiente truco puede hacerse con todo el público a la vez pues es muy rápido, fácil y sin embargo muy efectivo.

Un espectador piensa un número de cuatro cifras y calcula la suma de esas cuatro cifras. A continuación le resta al número pensado la suma de las cifras y tacha una de las cifras resultantes (que no sea un cero) y le dice al mago las cifras restantes en el orden que quiera. Inmediatamente el mago indica cuál ha sido la cifra tachada.

La justificación de este truco vuelve a basarse en la divisibilidad por 9. Si a un número cualquiera se le resta la suma de sus cifras, el resultado siempre es un múltiplo de 9. La forma de verlo es inmediata. Si consideramos el número $abcd=1000\cdot a+100\cdot b+10\cdot c+d$ la operación que hacemos es:
$(1000\cdot a+100\cdot b+10\cdot c+d)-(a+b+c+d) = 999\cdot a+99\cdot b+9\cdot c$

Por lo tanto, si se tacha una de las cifras de ese número, el mago sólo debe sumar mentalmente las cifras que se le van diciendo y cuando lo tenga, sólo debe buscar qué cantidad falta para que esa suma sea múltiplo de 9. Esa cantidad es la cifra tachada.

Por ejemplo si se ha pensado el 5293 se realiza la operación 5293–19=5274, si ahora tachamos el 7 y sumamos las demás cifras 5+2+4=11 nos faltan 7 unidades para el siguiente múltiplo de 9, luego ese número es el tachado.

Podría darse el caso de que al sumar las cifras resultantes, nos saliese directamente múltiplo de 9, entonces la cifra tachada tendría que ser un 9 (otra posibilidad sería el 0 pero ese lo hemos descartado de principio).

Este truco puede presentarse también de otra forma. Se le pide al espectador que piense un número de cuatro cifras donde no sean todas iguales, a continuación debe reordenar de distinta manera las cifras para obtener otro número, y a continuación resta los dos números. Con el resto hace lo mismo que en el caso anterior.

Es decir si parte de 5293 podría escribir el 2539 y al efectuar la diferencia obtendríamos 5293 – 2539 = 2754, que vuelve a ser múltiplo de 9.

7) El siempre previsible 1089.

Uno de los trucos que pueden encontrarse con más facilidad en cualquier relación de recreaciones matemáticas, es el del 1089.

Se pide al espectador que piense un número de tres cifras que no tenga iguales las cifras, al menos que no sea capicúa. A continuación, el mago, como si le hubiese leído el pensamiento, escribe un número en un papel y, doblado, se lo entrega a otro espectador que hará de secretario.

A continuación se le pide que haga las siguientes operaciones.

1) Cambie la primera y última cifra entre sí.
2) Reste los dos números que tiene, (al mayor se le resta el menor).
3) Al resultado de la resta le vuelva a cambiar la primera y última cifra.

4) Los dos últimos números los sume.
5) El resultado de la suma (1089) coincide con el número que el mago había escrito en el papel.

Veamos un ejemplo concreto. Si el espectador ha pensado el número 734 los pasos a seguir son:

1) Obtengo 437.
2) Resto   734 – 437 = 297.
3) Ahora tengo 792.
4) Por último sumo 297 + 792 = 1089.

La demostración de que siempre ocurre así la veremos a continuación.

Consideremos el número abc (donde partiremos del supuesto que a>c).
Al cambiar las cifras obtenemos cba y si restamos (descomponiéndolo según las cifras) obtendremos:
$(100a+10b+c) - (100c+10b+a) = 100(a-c) + (c-a)$ como $a>c$ entonces c-a es negativo.
Restamos 100 unidades para anular ese número negativo, realizando las siguientes operaciones:

$$100(a-c) + (c-a) = 100(a-c-1) + 100 + (c-a) = 100\,(a-c-1) + 90 + (10+c-a)$$

de esta manera $10+c-a$ ya es un entero positivo comprendido entre 1 y 9.
Se puede apreciar que este número tiene siempre como segunda cifra el 9 y la suma de la primera y la tercera es también siempre 9 pues $a-c-1+10+c-a = 9$.
Si ahora cambiamos entre sí la primera y la última cifra y sumamos tendremos:

$$[100\,(a-c-1) + 90 + (10+c-a)] + [100\,(10+c-a) + 90 + (a-c-1)] =$$
$$= 100\,(10+c-a+a-c-1) + 180 + (10+c-a+a-c-1) = 900 + 180 + 9 = 1089$$

La puesta en escena en este truco es fundamental para crear expectación y dejar al público realmente asombrado. Podemos escribir una palabra en el papel en lugar de un número. Cuando el espectador piensa el número se le da un libro, se le pide que haga las operaciones pertinentes y se le dice que busque en el libro de la siguiente forma. Localice la página correspondiente a las dos primeras cifras del número obtenido. Dentro de esa página la línea correspondiente a la siguiente cifra y dentro de esa línea la palabra que corresponda a la última cifra del número hallado. Esa palabra se encontrará escrita en el papel. Otra forma de presentar el truco es entregar una guía de teléfonos y pedirle al espectador que busque la página correspondiente a las tres primeras cifras del número obtenido y a continuación, dentro de ella, el usuario correspondiente a la última cifra, cuyo número de teléfono habrá escrito previamente en un papel el mago.

El proceso se puede hacer con cualquier número de cifras, aunque si se trabaja con un número de dos cifras el resultado es siempre 99. Si tomamos un número de cinco cifras y hacemos el proceso tendríamos:

a) Elegimos el 27835.
b) Cambiamos primera y última y restamos 57832–27835 = 29997.
c) Cambiamos primera y última y sumamos 29997+79992=109989

Siempre se obtiene el mismo resultado: 109989.

La forma de hacer el truco de una forma atractiva es escribir en un papel el número 686601 y tras mostrárselo al espectador y decir éste que no es lo que ha obtenido, el mago vuelve a mirar el papel y entonces se da cuenta que lo ha escrito al revés, por lo que al darle la vuelta aparece el resultado del espectador.

8) Multiplicar por 11

Una de las habilidades mágicas que suelen presentarse, es la de hacer operaciones muy rápidamente. Uno de esos ejemplos es multiplicar por 11. Si queremos multiplicar un número de dos cifras por 11, por ejemplo el 35, basta sumar las dos cifras (3+5=8) y colocar esa cifra entre las dos del número, así 35 x 11 = 358. Si por casualidad la suma diese dos cifras, la de las decenas se le suma a la de las decenas del número original, por ejemplo en 76, sumamos 7+6=13 y entonces el producto sería 76 x 11 = 836. Si es un número de más cifras, por ejemplo el 2354 el proceso es el siguiente: de derecha a izquierda se escribe la primera cifra y, a partir de ella, la suma de cada dos cifras, terminando con la primera. En nuestro caso sería 2(2+3)(3+5)(5+4)4, es decir, el número resultante de multiplicar por 11 sería 25894. Hay que hacerlo de derecha a izquierda por si en alguna suma obtenemos más de 10 para llevar la cifra de las decenas a la siguiente suma. Por ejemplo en 3815 sería 3(3+8)(8+1)(1+5)5 = 41964

9) La suma de Fibonacci

Se pide a un espectador que salga a la pizarra y escriba los números del 1 al 10. A continuación debe escribir un número de dos cifras junto al 1 y otro junto al 2. Los siguientes se calculan con la siguiente regla: cada número, a partir del 3º, se obtiene sumando los dos que se encuentran encima de él. Es decir, el 3º es 1º+2º, el cuarto es 2º+3º y así sucesivamente. Una vez llegado al final se le pide al espectador que suma los 10 números y el resultado coincide con el número que tendrá escrito el mago en un papel.

El truco consiste en lo siguiente. Supongamos que partimos de dos números desconocidos a y b y seguimos el proceso.

1	a
2	b
3	a+b
4	a+2b
5	2a+3b
6	3a+5b
7	5 a+8b
8	8 a+13b
9	13 a+21b
10	21 a+34b
suma	55 a+88b

Como se puede apreciar el resultado depende de a y b pero si comparamos con lo calculado en los pasos podemos observar que la suma es igual a once veces el término 7, quiere decir que en cuanto el mago observe el número que ha quedado en el 7º término puede calcular mentalmente, según el truco anterior, qué número va a quedar en la suma.

10) El cuadro de 3x3 en el calendario

Se le pide a un espectador que elija un mes cualquiera del calendario, y dentro de él rodee un cuadro de 3x3 que englobe 9 números. Como por ejemplo el de la figura.

		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
15	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

El espectador le dice al mago cuál es el primer número de su cuadro (en nuestro ejemplo el 8) y éste le indica al espectador cuanto vale la suma de su cuadro.

Explicación del truco.

La distribución de números en un calendario tiene propiedades numéricas que van bien para muchos trucos.

Si consideramos un cuadro cualquiera en el que el primer número es a, los restantes números serán los que aparecen en el cuadro siguiente.

a	a+1	a+2
a+7	a+8	a+9
a+14	a+15	a+16

Si sumamos esos nueve números se obtiene 9·a+72=9·(a+8). Es decir, que la suma es siempre nueve veces la suma del primer número más 8 (ó la cifra central).

En el ejemplo primero 8+9+10+15+16+17+22+23+24=144=9·16=9·(8+8)

11)La suma de cuatro números

Se le pide a un espectador que elija un mes del calendario, y dentro de él rodee con un cuadrado de cuatro números de lado, una extensión que comprenda 16 números.

Una vez rodeado, el mago escribe en un papel una cantidad y entrega el papel a otro espectador. A continuación le pide al espectador que realice las siguientes operaciones:

a) Elija un número de los 16 que hay y lo rodee con un círculo. Después tache todos los números que están en la misma fila o misma columna que el rodeado.
b) Debe después elegir otro número no tachado y repetir el proceso, rodearlo con un círculo y tachar los de su misma fila y columna.
c) Ya sólo deben quedar cuatro números sin tachar, de todos modos debe elegir uno de los cuatro y tachar los de su propia fila y columna.
d) Al final, queda sin tachar un solo número que se rodea con el círculo.
e) Por último, se suman los cuatro números que han quedado sin tachar, y se comprueba que esa suma corresponde con la cantidad escrita en el papel por el mago.

Explicación del truco:

El truco consiste en que el resultado de la suma es independiente de los valores que se tachen o se elijan; siempre que se sigan esos pasos, dará lo mismo. El proceso que se sigue permite que al final quede un número de cada una de las filas, y uno de cada una de las columnas.

Haciendo un estudio como el anterior, tendríamos seleccionado el siguiente cuadro. Si sumamos los elementos de la primera columna obtenemos:
a + a+7 a a+14 + a+21 = 4·a + 42

a	a+1	a+2	a+3
a+7	a+8	a+9	a+10
a+14	a+15	a+16	a+17
a+21	a+22	a+23	a+24

De esa manera tenemos un elemento de cada fila, pero como debemos tener uno de cada columna quiere decir que uno de ellos debe estar en la segunda columna (lo que significa una unidad más) otro en la tercera columna (+2) y uno en la cuarta (+3) por lo tanto la suma final es 4·a+42 + 1 + 2 + 3 = 4·a + 48 = 4·(a+12)

Luego basta conocer el primer número y hacer esa operación, para saber qué resultado se va a obtener.

12) El lanzamiento de tres dados

Se utilizan tres dados que se entregan al voluntario que se haya prestado a ayudarnos. El mago, de espaldas al ayudante, le va dando las siguientes instrucciones:

a) Lanza los tres dados.
b) Suma los números que aparecen en las caras superiores de los tres dados.
c) Toma ahora uno cualquiera de los dados y añade a la suma anterior, el valor de la cara sobre la que estaba apoyado ese dado.
d) A continuación, vuelve a lanzar el dado que has cogido y añade a todo lo anterior, el valor del número que sale en la cara superior.
e) De nuevo elige otro dado, puede ser el mismo de antes u otro distinto, y suma la cara sobre la que se apoyaba.
f) Vuelve a lanzar el último dado que has cogido, y aumenta la suma anterior con el valor que salga en la cara superior.

A continuación, el mago se acerca al voluntario. Tras dejar claro al público que éste ha tenido que sumar siete números, y que para el mago es imposible saber cuáles han sido los dados que ha elegido para volverlos a lanzar, inmediatamente indica cuál es la suma.

La forma de adivinar esa suma es muy fácil; el mago sólo tiene que fijarse en cuánto suman las tres caras de los dados que están en ese momento a la vista, y a esa cantidad sumarle 14.

Este truco puede hacerse también realizando sólo los cuatro primeros pasos. Es decir, sin tomar el segundo dado para ver la cara base, y volverlo a tirar. En ese caso lo que hay que añadir a la suma de las caras superiores expuestas es sólo siete.

13) La columna de dados

Sin mirar lo que hace el voluntario, el mago le pide que construya una torre con los tres dados, colocando un dado sobre otro.

A continuación le indica que sume las caras que están ocultas, es decir la de unión del primer dado con la mesa, las caras de unión entre el primer dado y el segundo y, por último, las caras de unión entre el segundo y el tercer dado.

Una vez hecho esto, el mago pide que escriba el resultado en un papel y se lo guarde. Seguidamente el mago se acerca al voluntario e inmediatamente le indica cuál es el resultado de la suma; lo que puede comprobarse con el número anotado en el papel.

Este truco es también muy fácil, pues lo único que tiene que hacer la persona que realiza el truco es fijarse en cuál es la cara superior del dado que queda encima de la pila, y esa cantidad restársela a 21 (si se utilizan cuatro dados hay que restarle la cantidad a 28).

<u>Justificación matemática de los trucos de dados anteriores</u>.

La base matemática en la que se apoyan los dos trucos anteriores es la misma. En los dados normales que se encuentran comercializados, hay una propiedad que siempre se cumple. La suma de las caras opuestas de un dado es siete.

Por esta razón, en el primer truco sólo hay que sumar siete por cada uno de los dados en que se haya sumado la cara superior, y la cara sobre la que se apoyaba. Así, si lo hacemos con un dado, aunque nosotros no hayamos visto ni la cara superior ni la inferior, sabemos que su suma es siete, que es lo que añadiremos a la suma de caras que está a la vista. Si hay dos dados a los que sumamos la parte inferior y volvemos a tirar, habrá que sumar 14, y así sucesivamente.

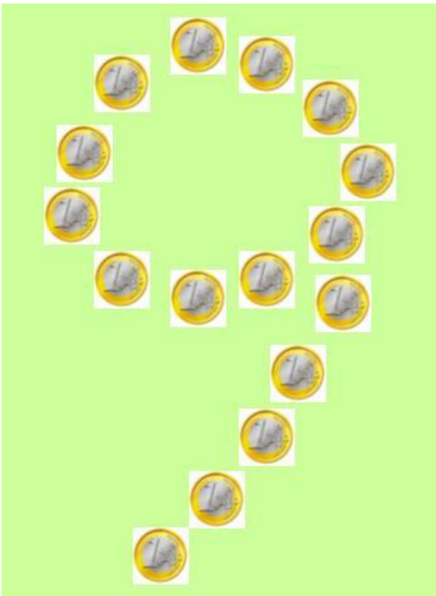
El segundo truco es aún más fácil. Las caras sobre las que se construye la columna de dados suman 7, por la cantidad de dados que haya apilados (si son tres en total, 21), luego sólo hay que restar la cara que está a la vista para saber la suma de las que están ocultas.

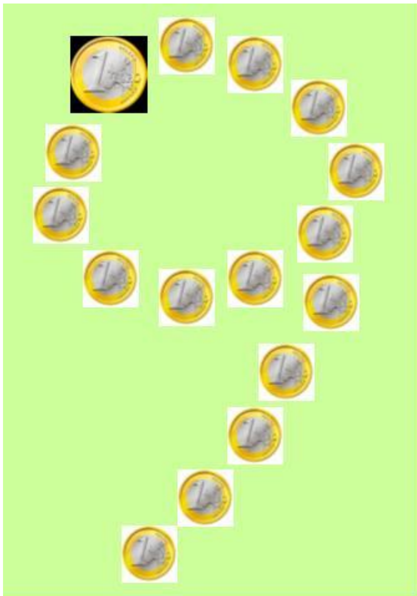
14) El nueve con monedas

Se construye un 9 utilizando monedas y se le pide al espectador que piense un número y que mentalmente recorra el nueve comenzando al final del rabito del nueve y vaya contando monedas entrando dentro de la cabeza del nueve en el sentido contrario a las agujas del reloj. Una vez terminado de contar, debe volver a contar desde la siguiente moneda, ahora en el sentido horario, y sin salir del círculo que forma la cabeza. El mago adivina en qué moneda queda al final.

La razón es que, independientemente del número pensado, el resultado siempre queda en la moneda que está a la misma distancia de la entrada en el círculo superior que el número de monedas que hay en el rabito.

Puede comprobarse con las siguientes imágenes.





15)La casa embrujada

Este truco puede hacerse con un archivo flash, como lo hicimos en el taller, o bien con cartas como lo vamos a explicar aquí proyectándolas con un retroproyector.

El mago proyecta un cuadro hecho con nueve cartas (figura 1) y explica que simulan cuartos de una casa embrujada, en la que los cuartos pueden aparecer y desaparecer. Cada movimiento que puede hacerse dentro de la casa, consiste en pasar a otro cuarto contiguo en horizontal o vertical, nunca en diagonal. Muestra varios movimientos posibles, donde se ve que puede volverse al cuarto anterior, pero siempre por los lados de las cartas, nunca por los vértices.

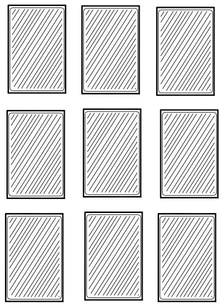


Figura 1

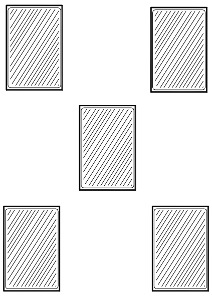


Figura 2

A continuación, el mago retira cuatro cartas (figura 2) y le pide a cada espectador que mentalmente se coloque en una de las habitaciones que quedan.
Cuando lo han hecho, el mago vuelve a colocar las cartas iniciales completando el cuadro de la figura 1, cuyas cartas consideraremos numeradas (figura 3).
Pide a los espectadores que realicen los siguientes pasos a la vez que retira cartas.

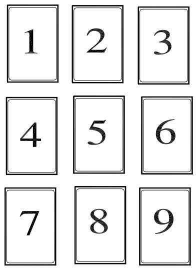


Figura 3

a) Se mueven tres veces y retira las cartas 1 y 3 (queda figura 4).
b) Se muevan cinco veces y retira las cartas 2 y 6 (queda figura 5).
c) Se mueven tres veces y retira la carta 5 y 9 (queda figura 6).

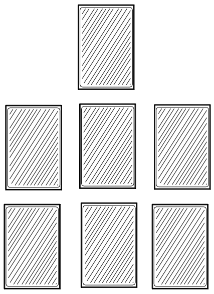


Figura 4

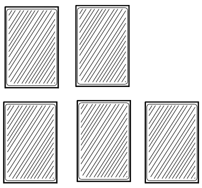


Figura 5

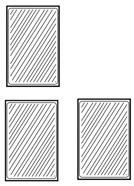


Figura 6

d) Por último, se deben mover otras tres veces y retira las cartas 4 y 8. Sólo queda la carta 7, que serán donde estén todos los espectadores.

Explicación del truco.

Este truco se basa en la dualidad par – impar. La posición de las cartas hace que unas sean pares y otras impares (ver numeración en figura 3). Tras realizar un número impar de movimientos, si al principio estamos en una carta par acabamos en una impar, o viceversa.

Si seguimos los pasos del juego, todos los espectadores comienzan en casillas impares (figura 2), tras el paso a) han terminado en casillas pares, por lo que podemos quitar sin problemas las cartas 1 y 3. Después del paso b) terminarán todos en casillas impares, por lo que podemos quitar casillas pares, y así sucesivamente hasta el final.

Una forma de darle más misterio es pedirle a los espectadores números del 1 al 5 e ir quitando las habitaciones a gusto del mago, que en todo momento sabe en qué tipo de habitaciones se encuentran los espectadores.

Otra forma de hacerlo es pedir a un espectador al principio que indique una de las habitaciones y hacer el recorrido de forma que todos los espectadores queden en ea habitación.

16) Orden en el Universo

Este truco está presentado por el profesor Pedro Alegría en la página de divulgamat (ver referencia) y aunque muy simple, deja al público realmente asombrado.

Se toman, boca abajo, las cartas del 1 al 9 de cualquier palo y se colocan ordenadas en orden decreciente. La primera el as, debajo de ella el dos, luego el tres y así sucesivamente.

El mago muestra al público las cartas para que vean que están ordenadas y a continuación se sacan tres personas del público y se les pide que cada una de ellas realice los siguientes pasos:

1) Corte el mazo y complete el corte.
2) Divida el mazo en dos montones carta a carta, es decir la primera carta a un montón, la segunda a otro, la tercera al primer montón y así todas.
3) Por último coloque uno de los dos montones encima del otro.

Después de que los tres voluntarios han realizado lo anterior, y siempre teniendo las cartas boca abajo, el mago muestra la última carta del mazo y pasa, una a una de abajo hasta arriba del mazo, tantas cartas como indique el valor de la carta mostrada.

Después de realizado lo anterior, el mago muestra de nuevo las cartas al público y asombrosamente las cartas vuelven a estar en orden.

El truco es meramente combinatorio. Cuando colocamos las cartas de la manera anterior, da igual como se hagan los cortes, porque obtenemos un bucle formado por las nueve cartas. Al dividir las cartas en dos montones, las cartas en lugar de ir consecutivas, van de dos en dos, al realizar el segundo corte van de cuatro en cuatro y al tercer corte van de ocho en ocho. Pero al tener nueve cartas, si después de una va la correspondiente a ocho cartas después, al ser cíclico cada carta lleva aparejada la anterior. De esa manera las cartas vuelven a estar en orden después de los tres cortes. Únicamente puede ser que no comience en el 1, para ello es por lo que se mira la última carta y se trasladan de abajo hacia arriba tantas como indique ese número.

17) Completar a 10.

Para este truco se necesita una baraja española de 48 cartas (con 8 y 9) o una baraja francesa de 52 cartas.

Supongamos que lo hacemos con la francesa. Se barajan las cartas y se colocan boca abajo sobre la mesa 12 cartas. Se le pide a un espectador que vuelva boca arriba cuatro de esas cartas. Las restantes se recogen y se colocan debajo del mazo.

A continuación, se van a completar con cartas del mazo las cartas que están sobre la mesa. Se colocan frente a cada una de las cuatro cartas, tantas cartas del mazo como hagan falta para completar desde el número de esa carta hasta 10 (las figuras se consideran que valen 10). Una vez realizado, se suman los valores de las cuatro cartas que hay sobre la mesa, y se sacan del mazo tantas cartas como el resultado de esa suma. Sin mirarla, el mago dice en voz alta qué carta es la última que ha puesto sobre la mesa.

El truco consiste en que una vez colocadas sobre la mesa las 12 cartas, el mago debe mirar sin que se note, qué carta hay al final del mazo. Esa es la carta que va a descubrir al final. El fundamento matemático es que cuando reparte las 12 cartas sobre la mesa, le quedan en el mazo 40 cartas, luego la carta vista es la número 40. Si ahora por cada carta primero completamos a 10 y después quitamos tantas cartas como indica el valor, realmente estamos quitando del mazo en total 10 cartas por cada una de la mesa, es decir, en total quitamos 40 cartas.

18) Del 10 al 1

Tomamos una baraja con 40 cartas. Si es española hay que insistir en que el rey vale 10, el caballo 9 y la sota 8. Si es francesa se quitan las figuras.

Un espectador baraja y coloca boca abajo 7 cartas sobre la mesa. Levante la 7ª carta, la observa y muestra al público y la vuelve a colocar boca abajo sobre el montón de la mesa. Después se coloca el resto del mazo sobre ese montón.

Ahora debe hacer lo siguiente.

a) Comienza a colocar sobre la mesa, boca arriba, cartas del mazo a la vez que va contando en orden inverso. La primera carta será 10, la siguiente 9, la siguiente 8 y así hasta llegar a 1.
b) Si en algún momento de ese recuento la carta echada coincide con el número correspondiente, se para de echar cartas y se deja aparte el montón.
c) Si se llega a uno sin que coincida ninguna carta, el montón se desecha y se le da la vuelta, colocando las cartas boca abajo.
d) Se hace lo mismo en otros dos montones, quedando al final tres montones.
e) Se echan sobre la mesa tantas cartas como montones haya boca abajo, si hay alguno.
f) Por último se suman las cartas que están a la vista y se separan del mazo que queda en la mano tantas como indica esa suma. La carta que queda boca abajo sobre el mazo que hay en la mano es la carta que había visto el especador.

19) **Competencia básica**

Se entrega la baraja francesa (o española de 48 cartas) a un espectador y, mientras el mago se encuentra de espaldas, se le pide que realice las siguientes actividades:

1) Baraje según su gusto.
2) Divida la baraja en dos montones de aproximadamente la misma cantidad de cartas (es decir que no haya mucha diferencia entre los dos montones).
3) Debe escoger uno de los dos montones y contar cuidadosamente cuántas cartas posee ese montón sin decir en voz alta la cantidad.

4) A continuación, debe sumar las dos cifras del número que ha obtenido al contar, por ejemplo si tiene 28 cartas sumar 2+8.
5) Quite del montón que tiene en la mano tantas cartas como la suma obtenida y déjelas boca abajo sobre el montón que quedó sobre la mesa.
6) Ahora mire la primera carta del montón que le queda en la mano y si quiere la enseña al resto del público. Después déjela boca abajo sobre el mazo.
7) Por último, coloque las cartas que aún tiene en la mano sobre el mazo.
8) Ya el mago puede volverse pero sigue sin tocar las cartas. Le pide a otro espectador que tome el mazo y que deletree la frase “Competencia básica” mientras va colocando una a una cartas del mazo sobre la mesa (siempre boca abajo).
9) Al acabar de deletrear, se vuelve la última carta que queda en la mano que será la que el espectador había visto y mostrado al resto del público.

Explicación del truco:

Este truco se basa en otra propiedad muy extendida en la magia matemática, la divisibilidad por 9.

Al formar dos montones con las 48 ó 52 cartas, cada montón tendrá un número de cartas entre 20 y 30. Si a un número mayor de 20 y menor de 30 le restamos la suma de sus cifras, siempre nos da el valor 18. Por ello al acabar el paso 5) es seguro (salvo equivocación) que al espectador le queden en la mano 18 cartas.

Al colocar la carta vista sobre el mazo y después las restantes, es seguro que la carta buscada es la que hace el número 18 contando desde arriba, Lo único que hay que hacer es deletrear una frase con 18 letras para que se encuentre la carta buscada. En nuestro caso se ha deletreado “Competencia básica” que tiene 17 letras, por lo que la 18 será la primera que ha quedado en el mazo que tenemos en la mano.

20) Las 9 (o 21, o 27) cartas

Hay un truco que suele ser conocido por mucha gente del público, pero que es posible modificar para dejar más asombrados a los que creen que lo saben.

Básicamente es lo siguiente. Tomamos 9 cartas cualesquiera y se las muestra a una persona del público, mientras vamos montando con ellas tres montones para que, sin decírnoslo, elija una de las 9 cartas. Al acabar, nos indica en qué montón ha quedado su carta elegida; el mago coloca los montones uno sobre otro y vuelve a repartir en tres montones enseñándolo al público y al acabar le indican en que montón ha quedado ahora la carta. El mago coloca los montones uno sobre otro y puede decir cuál es la carta que el espectador había elegido.

Si se tienen 21 o 27 cartas es necesario realizar una vez más el reparto en tres montones, para colocar en su lugar el sitio buscado.

En general, el truco se enseña de forma que el mago coloca en cada ocasión el montón donde está la carta elegida entre los otros dos, de esa manera, la carta queda al final en el centro del mazo.

Yo prefiero utilizar sólo nueve cartas, porque así el truco es más rápido y además, modificando el orden en que se colocan los mazos, se puede conseguir que la carta quede en el lugar que se quiera. En el siguiente cuadro vemos cómo colocar el montón donde está la carta buscada en cada reparto, según el lugar donde queramos que quede.

Lugar donde se quiere que acabe la carta buscada	1	2	3	4	5	6	7	8	9
El montón con la carta se coloca, después del primer reparto	3º	2º	1º	3º	2º	1º	3º	2º	1º
El montón con la carta se coloca, después del segundo reparto	1º	1º	1º	2º	2º	2º	3º	3º	3º

Por ejemplo, si queremos que la carta quede en el lugar 8, como colocamos uno sobre otro los tres montones que hemos hecho, necesitamos que la carta quede la penúltima del último montón que coloquemos en ese reparto. Para quedar la penúltima en el reparto, y como hay tres, quiere decir que queda la segunda, tiene que provenir del segundo montón colocado en el primer reparto.

Conseguir esto mismo con 21 ó 27 cartas también es posible, pero mucho más complicado ver el orden en que hay que colocar los montones en cada reparto.

Bibliografía y recursos

ALEGRÍA, PEDRO y RUÍZ DE ARCAUTE, J.C. (2002): “La matemagia desvelada”. *Sigma* 21, 145-174.

Puede consultarse una copia en PDF en la dirección:
http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.net/r43-573/es/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/adjuntos/sigma_21/10_la_matemagia_desvelada.pdf

El profesor Pedro Alegría presenta varios trucos en la sección de “El Rincón Matemágico” de la página de Divulgamat en la dirección siguiente:
http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_alphacontent&section=11&category=63&Itemid=67

ALEGRÍA, PEDRO (2008): *Magia por principios*. Editado por el propio autor.

ÁLVAREZ, VENANCIO, FERNÁNDEZ, PABLO y MÁRQUEZ, M.A. (2002): “Cartomagia matemática y cartoteoremas mágicos”. *Gaceta Matemática*

Puede consultarse una copia en PDF en la dirección:
http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/gallardo/magia.pdf

BLASCO, FERNANDO (2007): *Matemagia*. Ediciones Temas de Hoy S.A., Madrid.

BOLT, BRIAN (2001): “La magia de las matemáticas”, SUMA, nº 36, 5-15.

BRACHO, RAFAEL (1999): *Actividades recreativas para la clase de Matemáticas,* Consejería de Educación y Ciencia de la Junta de Andalucía, Delegación Provincial de Córdoba.

FERRERO, L. (1991): *El juego y la Matemática*, Ed. La Muralla, Madrid.

GARDNER, MARTIN (1992): *Magia inteligente*. Zugarto ediciones, Madrid.

GONZÁLEZ, FRANCISCO (2003): "Matemagia: la magia de las matemáticas". En *Actas de las IV Jornadas de Educación Matemáticas de la Comunidad Valenciana*. 471-476

Puede consultarse una copia en PDF en la dirección:
http://www.ua.es/personal/SEMCV/Actas/IVJornadas/pdf/Part81.PDF

LANDER, ISIDORO (1989): *Magia Matemática*. Labor, Barcelona. 2ª Edición

MUÑOZ, J.; HANS, J.A. y FERNÁNDEZ-ALISEDA, A. (2003): "La magia también se nutre de matemáticas", en *Actas de las X Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*, Zaragoza, pp. 801-805.

MUÑOZ, J.; HANS, A. y FERNÁNDEZ-ALISEDA A.(2003): "Matemáticas y magia". En *Actas de III Jornadas Provinciales de Matemáticas*, Madrid, pp. 113-128.

MUÑOZ SANTONJA, JOSÉ (2003) *Ernesto el aprendiz de matemago*. Nivola, Madrid.

MUÑOZ SANTONJA, JOSÉ (2007): "Una matemática motivadora: la matemagia". En *Actas de las VI Jornadas de Educación Matemáticas de la Comunidad Valenciana*

Se puede consultar en PDF en la dirección:
http://thales.cica.es/~estalmat/Actividades-ejemplos/MatemagiaEstalmat.pdf

PERELMAN, Ya I. (1983): *Problemas y experimentos educativos*. Mir, Moscu, 2ª edición.