

VICENTE MEAVILLA SEGUÍ

Las matemáticas del arte

Inspiración ma(r)temática



ALMUZARA

2007

© VICENTE MEAVILLA SEGÚI, 2007
© EDITORIAL ALMUZARA, S.L., 2007

1ª edición: julio de 2007

Reservados todos los derechos. «No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, ni su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea mecánico, electrónico, por fotocopia, por registro u otros métodos, sin el permiso previo y por escrito de los titulares del *Copyright*.»

COLECCIÓN MATEMÁTICA

Director de colección: GERARDO VALEIRAS

EDITORIAL ALMUZARA

Director editorial: ANTONIO E. CUESTA LÓPEZ

www.editorialalmuzara.com

pedidos@editorialalmuzara.com - info@editorialalmuzara.com

Diseño y preimpresión: TALENBOOK

Imprime: TALLER DE LIBROS, S.L. [www.tallerdelibros.com]

I.S.B.N: 978-84-96710-50-4

Depósito Legal: CO-406-07

Hecho e impreso en España - *Made and printed in Spain*

*Para Paqui,
mi única fuente de inspiración*

A modo de invitación

El libro que has empezado a leer no es un manual de matemáticas ni un tratado de arte. Tampoco es un texto de matemática artística.

¿De qué trata, pues, este libro?

En las líneas que siguen encontrarás numerosos ejemplos de obras extraídas de la pintura, la escultura, el diseño gráfico, la arquitectura y la ingeniería, en las que se percibe una influencia matemática en alguna fase de su génesis o desarrollo¹. Esta influencia puede ser consciente o inconsciente por parte del pintor, escultor, diseñador, arquitecto o ingeniero que las ha creado.

Así las cosas, podría decirse que el libro que tienes en las manos es un manual de arte matemático. Consecuentemente, su lectura puede servir para que determinados artistas valoren el papel de las Matemáticas como fuente de inspiración. Por otro lado, este tratado puede ser útil a los matemáticos y a los profesores de Matemáticas a la hora de tener una percepción de esta disciplina mucho más completa y enriquecedora.

El contenido del libro está estructurado en nueve capítulos y un apéndice en el que, atendiendo a un segmento de lectores con inquietudes matemáticas, se desarrollan algunos contenidos matemáticos elementales a los que se han hecho referencia en los capítulos que le preceden. En estos, a modo de salas de una galería de arte, se exponen algunas obras atendiendo al tipo de tópicos matemáticos que las inspiran o podrían haberlas inspirado.

¹ Los lectores familiarizados con la influencia de las matemáticas en el arte notarán la ausencia de algunas obras paradigmáticas de Dalí, Escher, Durero, etc., cuya reproducción (sujeta a las tasas derivadas del copyright) hubiese encarecido y dificultado la publicación de este libro.

Así, el capítulo 1 [Números artísticos] se consagra a aquellas obras en las que los símbolos utilizados para representar los números juegan un papel relevante.

Por otro lado, el capítulo 2 [Demostraciones cromáticas] pasa revista a una colección de teoremas matemáticos cuyas demostraciones gráficas pueden utilizarse en la creación artística.

El capítulo 3 [Arte poligonal] pone de relieve la incidencia de algunos polígonos (triángulos, cuadrados, rectángulos, pentágonos regulares y pentágonos regulares estrellados, hexágonos y octógonos) en el arte.

Por su parte, el capítulo 4 [El discreto encanto de las curvas] atiende a la presencia de algunas curvas elementales (cónicas, sinusoides, espirales y catenarias) en la pintura, arquitectura e ingeniería.

El capítulo 5 [Poliedros: las mil caras del arte] pone de manifiesto las posibilidades artísticas de los poliedros regulares, los poliedros arquimedianos, los prismas y las pirámides.

Algunos *cuerpos redondeados* (esferas, conos, cilindros y elipsoides) son los protagonistas del capítulo 6 [Geometría tridimensional redondeada].

La presencia de las superficies regladas en el arte se estudia en el capítulo 7 [La belleza de las superficies regladas].

El capítulo 8 [Miscelánea] incluye una serie de tópicos cuya ubicación en los capítulos anteriores hubiese resultado problemática.

Por último, en el capítulo 9 [Galería de imágenes comentadas] se ofrecen los comentarios de matemáticos y artistas a algunas obras de arte matemático.

Llegados a este punto, te invitamos a que inicies tu paseo por la exposición MARTEMÁTICA y te deseamos que esta visita te resulte provechosa.

Al mismo tiempo, a modo de ayuda, te adjuntamos el programa de mano en el que se detalla la distribución de los contenidos en cada una de las nueve salas.

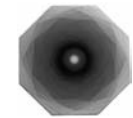
SALA 1: Números artísticos



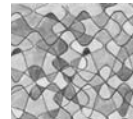
SALA 2: Demostraciones romáticas



SALA 3: Arte poligonal



SALA 4: El discreto encanto de las curvas



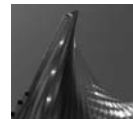
SALA 5: Poliedros: las mil caras del arte



SALA 6: Geometría tridimensional redondeada

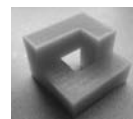


SALA 7: La belleza de las superficies regladas



SALA 8: Miscelánea

SALA 9: Galería de imágenes comentadas



Capítulo 8

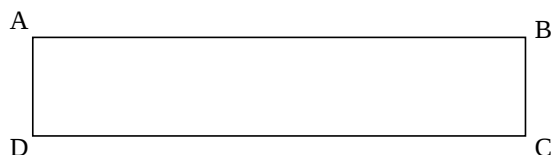
Miscelánea

En este capítulo, a modo de popurrí, presentamos diversos tópicos que no hemos sido capaces de incluir en las páginas precedentes.

8.1. La banda de Moebius

La banda de Moebius, en honor al matemático alemán August Ferdinand Moebius (1790-1868), es uno de esos extraños seres matemáticos que, en primera instancia, suele sorprender a propios y extraños.

La banda o cinta de Moebius es una superficie de una sola cara que se obtiene a partir de una tira de papel ABCD, pegando los lados AD y BC de modo que A coincida con C y D con B.



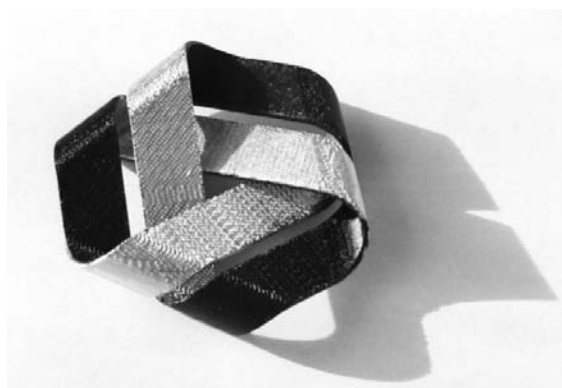
Así se genera un objeto 3D como el que está representado en el sello de correos de la figura adjunta.



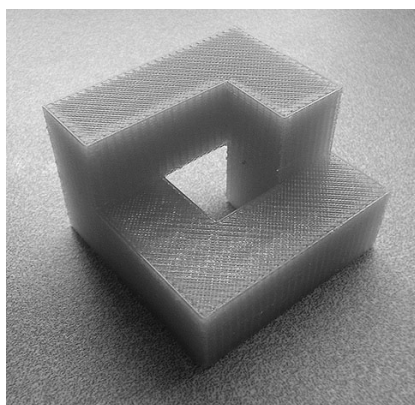
Cintas de Moebius en un sello brasileño

La cinta de Moebius ha sido utilizada por algunos artistas plásticos. Por ejemplo, el grabador holandés Maurits Cornelius Escher (1898-1972) se sirvió de ella en sus conocidos trabajos *Moebius Strip I* (1961) y *Moebius Strip II* (1963). Por su parte, el pintor, escultor y arquitecto suizo Max Bill (1908-1994) dio a conocer la famosa banda en algunas de sus esculturas de granito.

Menos conocidas son las esculturas de Carlo H. Séquin, profesor de Ciencia de la Computación en la Universidad de Berkeley (California), relacionadas con la cinta de Moebius. En las figuras siguientes ofrecemos una versión clásica y otra poliédrica de dicho *monstruo matemático*.



Carlo H. Séquin. *Escher's Moebius Band I* (2000)



Carlo H. Séquin. *Moebius Prism* (1999)

8.2. La sucesión de Fibonacci

El matemático más notable y productivo de toda la Edad Media fue Leonardo de Pisa, conocido también como Leonardo Pisano y Fibonacci.

En 1192, el padre de Leonardo fue nombrado director de una compañía comercial de Bugia (Argelia). En esta ciudad Fibonacci recibió las enseñanzas de un maestro árabe y aprendió a calcular con los numerales indo-arábigos que se usan en la actualidad.

Leonardo viajó por Egipto, Siria, Grecia, Sicilia y por el sur de Francia, relacionándose con eruditos y estudiosos de las Matemáticas.

En 1200 Fibonacci regresó a su Pisa natal y escribió diversas obras de contenido matemático, de las que sólo se han conservado las siguientes: *Liber Abaci* (1202), *Practica geometriae* (1220), *Flos* (1225), *Carta a Teodoro* y *Liber quadratorum* (1225).

En el *Liber Abaci*, Leonardo de Pisa dio un tratamiento satisfactorio a la aritmética y al álgebra. A lo largo de los quince capítulos del libro, se muestra cómo nombrar y escribir los números en el sistema indo-arábigo; se desarrollan métodos de cálculo con números naturales y fracciones; se extraen raíces cuadradas y cúbicas; se obtienen las soluciones de ecuaciones lineales y cuadráticas; se resuelven problemas de trueques, compañías, aligación, etc., y se estudian cuestiones prácticas de geometría.

En este libro aparece la famosa *sucesión de Fibonacci*:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

en la que cada término, a partir del segundo, es igual a la suma de los dos anteriores. Dicha serie numérica permite resolver el siguiente problema sobre la descendencia de una pareja de conejos.

¿Cuántas parejas de conejos se producirán en un año, a partir de una pareja, si cada mes cualquier pareja engendra otra, que se reproduce a su vez desde el segundo mes?

Aunque pueda parecer extraño, encontramos la sucesión de Fibonacci en una fuente diseñada por el matemático y escultor Helaman Ferguson, en las columnas del atrio del Santuario de Nuestra Señora de Torreciudad (Huesca), en una chimenea de la ciudad finlandesa de Turku y en dos esculturas del australiano Andrew Rogers localizadas en Jerusalén y en el desierto de Arava (Israel)¹, respectivamente.



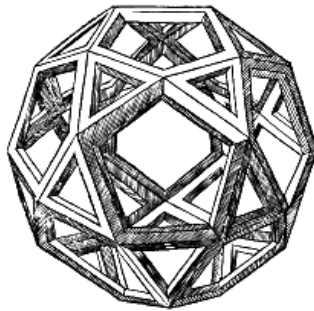
Heliodoro Dols. *Columnas del atrio del Santuario de Nuestra Señora de Torreciudad*

Cada una de las esculturas de Rogers consta de treinta y dos piedras prismáticas dispuestas en columnas de acuerdo con el *capicúa de Fibonacci* 11235853211.

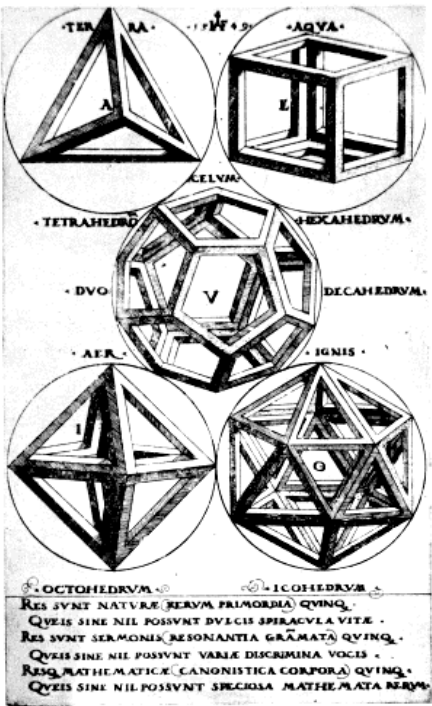
¹ La escultura del desierto de Arava forma parte del proyecto *The Rhythms of Life* con obras repartidas por Australia, Sri Lanka, Bolivia, Chile e Israel.

8.5. El arte de ilustrar

En los libros antiguos de Perspectiva y Geometría es fácil encontrar bellos dibujos de poliedros que pueden servir de ejemplo e inspiración a los artistas gráficos que se dedican a la ilustración.

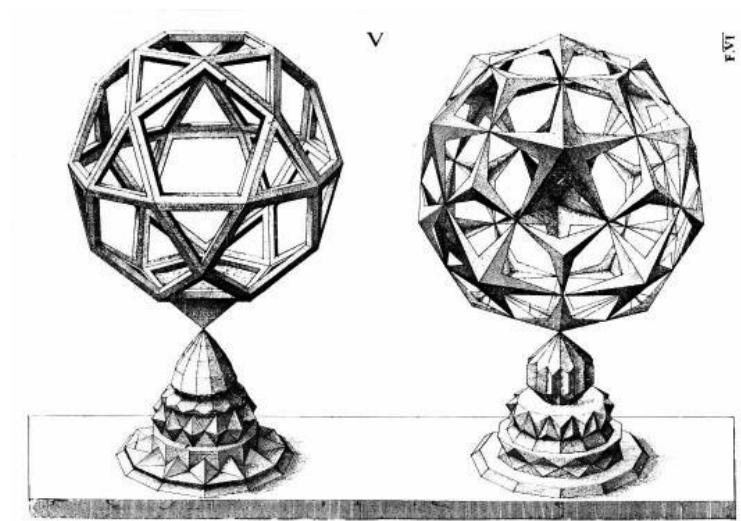


Leonardo da Vinci. Dibujo del icosidodecaedro

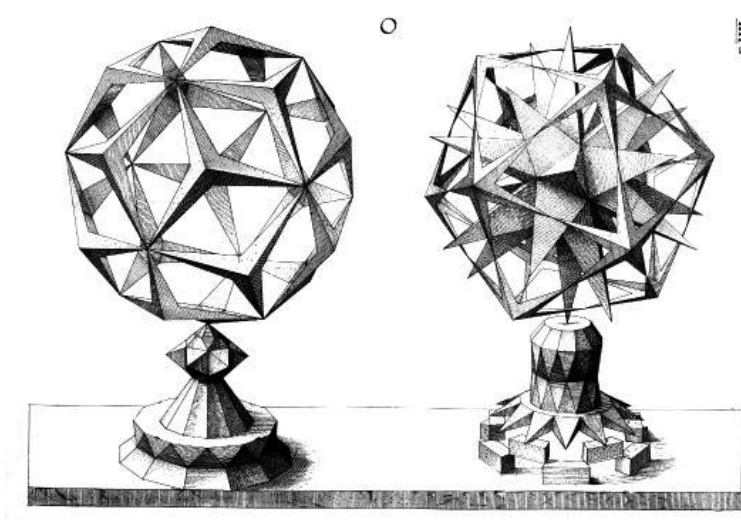


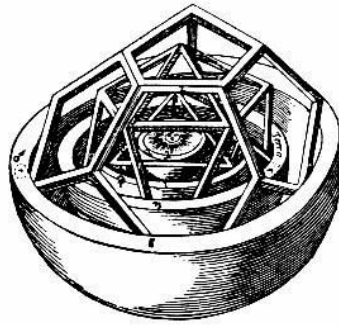
Augustin Herschvogel (1503-1553)

Notemos que en la representación anterior de los cinco poliedros regulares aparece una identificación de cuatro de ellos con los elementos aire, tierra, fuego y agua distinta de la que se encuentra en la cosmología platónica (octaedro $\approx$ aire, tetraedro $\approx$ fuego, cubo $\approx$ tierra, icosaedro $\approx$ agua).

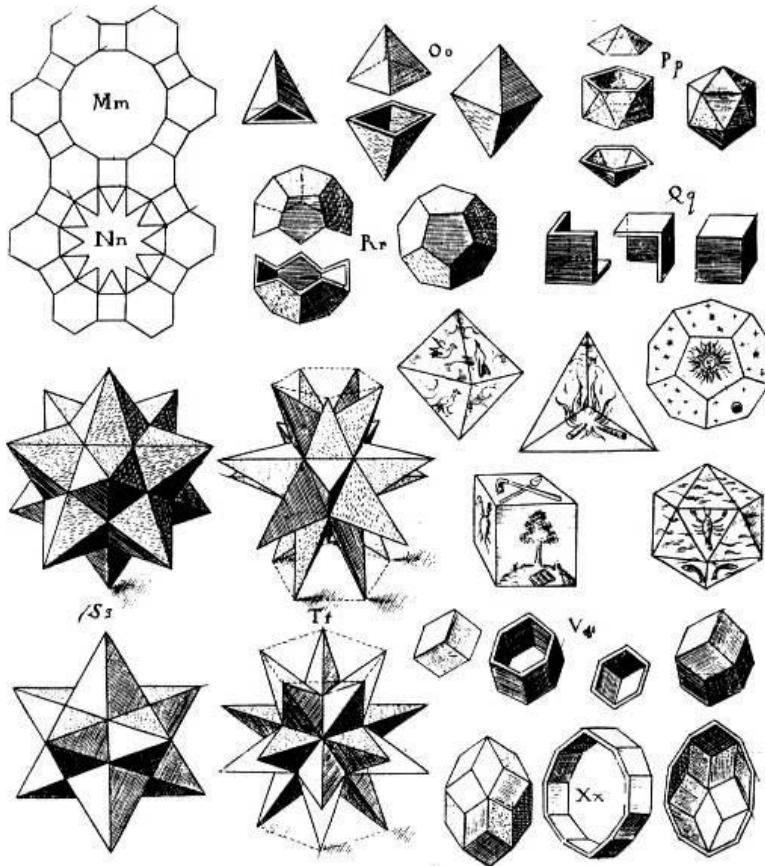


Wentzel Jamnitzer (1508-1585)

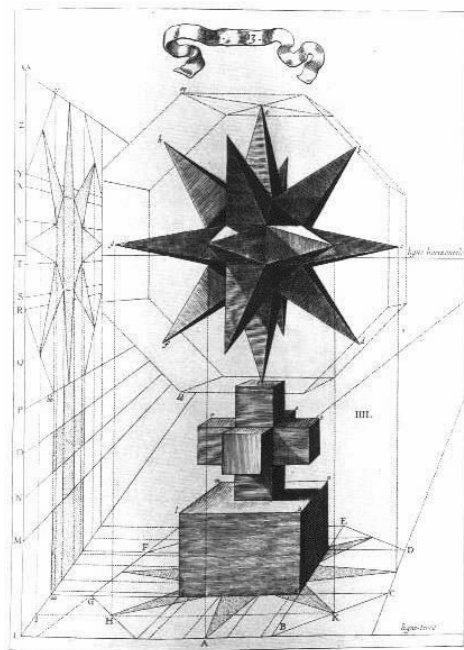




El modelo planetario de Johannes Kepler (1571-1630)



Poliedros de Johannes Kepler



Jean-Francois Niceron. Thaumaturgus Opticus (1638)

8.6. Matelogos

En el mundo del diseño gráfico la presencia de las Matemáticas en general y de la Geometría en particular es evidente en algunos logotipos.





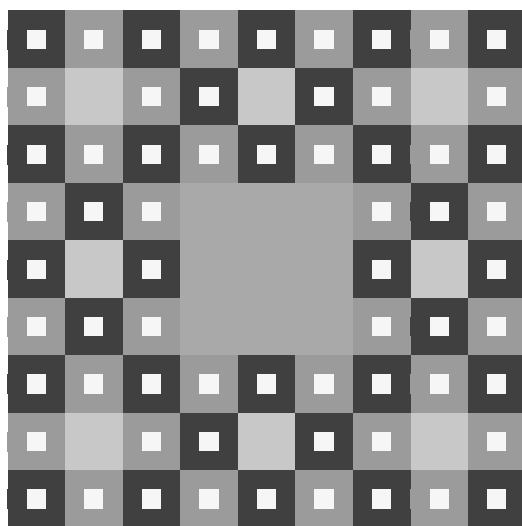
Fotografía de Alex Bratu



Capítulo 9

Galería de imágenes comentadas

En este último capítulo presentamos una colección de imágenes a las que hemos añadido comentarios escritos por profesores, matemáticos, científicos y artistas.

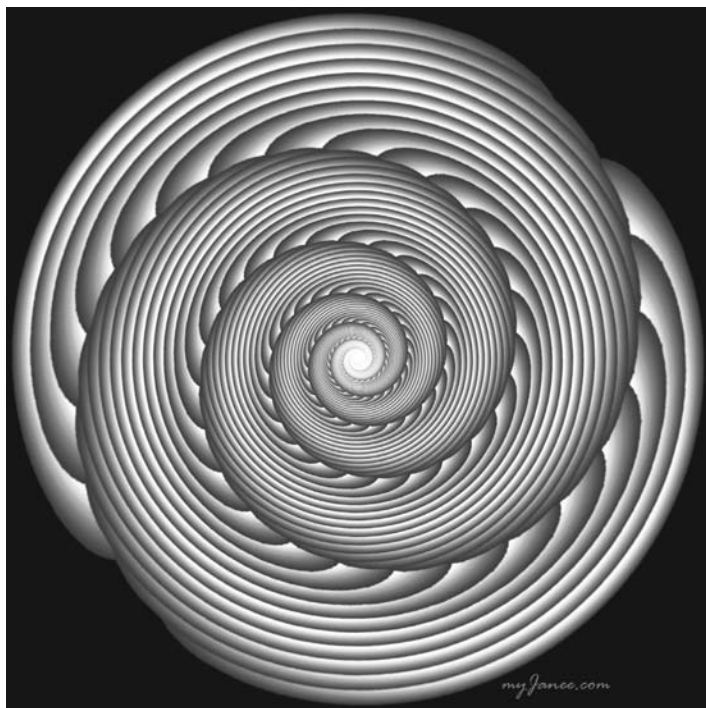


V.Meavilla (2006)

La imagen se parece a un mantel. Es como uno de esos manteles que se usan para ir al campo a merendar. Aunque si nos paramos un poco, enseguida empezamos a ver “cosas” relacionadas con las matemáticas.

Vemos que hay cuatro ejes de simetría, a partir de los cuales podríamos determinar cuál es el motivo mínimo que nos permite generar todo el dibujo mediante traslaciones, giros o simetrías.

Vemos un cuadrado, y en su interior cuadrados más pequeños que, a su vez, contienen otros cuadrados. Inmediatamente se nos aparece la idea de fractal, así como una de sus principales características: la autosemejanza.



Janee Aronoff. *Gold*

Decía Eistein que si consiguiéramos poder desplazarnos a la velocidad de la luz el tiempo se detendría...

Esta obra da una sensación de viajar en el tiempo y sumergirnos en la profundidad de la geometría. Sin tiempo. Paz.

Si empezamos a mirar la obra desde su interior veremos que surgen dos posibles caminos que van dando vueltas y expandiéndose y que no se cruzan en su andadura, son como dos series numéricas, los números impares y los pares que pueden prolongarse hasta el infinito y nunca llegarán a tener ningún número en común. Recuerda a una espiral hecha de espirales que una surge de la otra expandiéndose continuamente, como si estuviera en movimiento. Si te alejas parece que vaya a menor velocidad y si te acercas va a más velocidad. Hay momentos, según cómo se mire, que parece que sale del papel en

dirección hacia nosotros, como la concha de un caracol, y otros momentos que parece que caemos en un gran agujero en forma de tobogán, de una gran profundidad. Una función que tiende hacia el infinito como si fuera su límite.

¿Qué hay en su interior?

La vida da muchas vueltas y aunque a veces nos parece complicada, al final siempre hay una luz, como las matemáticas. Para mí las matemáticas nos ayudan a ir por la vida resolviendo los pequeños o grandes problemas que se nos presentan en el día a día. Todas las ciencias se ayudan de los números para poder expresar resultados y los números nos acompañan desde que nos levantamos hasta que nos vamos a dormir, a veces, como en la figura, nos pueden parecer complicados pero al final nos dan una sensación de seguridad que es lo que me transmite esta obra. SEGURIDAD, y mucha exactitud que es la tranquilidad que transmiten los números.

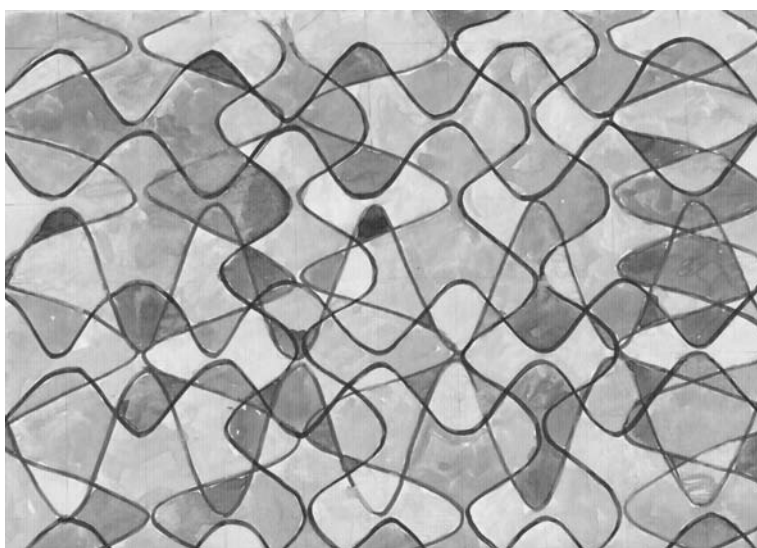
Esta obra esta muy bien proporcionada y mantiene una gran relación. Si trazamos bien las primeras líneas, las siguientes ya son una continuidad que nos vienen marcadas por el dibujo, si en matemáticas conseguimos una buena base, podemos construir después un gran edificio. Es muy importante colocar bien las primeras piezas para que después todo encaje. Todos tenemos capacidad para aprender matemáticas como la tenemos para aprender a andar o a comer o... pero hay que despertar sensaciones positivas para ello.

Hablando de comer este dibujo podría recordarnos una gran ensaimada de crema o de nata a la que le das el primer mordisco, todo es empezar y a veces, en matemáticas también todo es empezar. Si tienes confianza en que tu puedes y dispones de las herramientas necesarias para ello, puedes “comerte” las matemáticas.

En la naturaleza podemos encontrar figuras geométricas de una gran belleza, flores, peces, conchas, frutos... y también podemos expresar, mediante figuras geométricas, obras de gran belleza como la que se nos propone. La matemática también contribuye a crear belleza.

Como digo en mi último libro, *A la matemática se llega por el sentimiento*.

Dr. Salvador VIDAL RAMÉNTOL
Vicedecano de Magisterio
Facultad de Humanidades
Universidad Internacional de Cataluña



Jesús Rando. *Color 1* (2002)

Uno de los principales retos a los se enfrenta un pintor abstracto cuando se pone delante de una tela totalmente blanca es el de descomponerla en zonas para, acto seguido, iluminarlas con color.

En ocasiones este proceso se limita a dividir una porción del plano en conjuntos disjuntos, limitados por segmentos rectilíneos, cuya unión recubre el lienzo. En otras se recurre a descomposiciones más sofisticadas y complejas (regiones con intersecciones no vacías) en las que pueden intervenir las gráficas de ciertas funciones elementales.

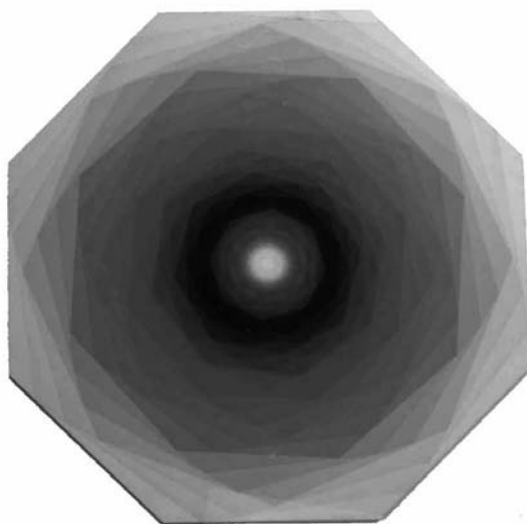
Esta segunda técnica es la que pone en práctica Jesús Rando (amigo, profesor y artista turolense) en su obra *Color 1*.

Las fronteras que delimitan las distintas provincias cromáticas bien podrían ser las gráficas de algunas funciones trigonométricas, tan familiares a los estudiantes de Bachillerato. Quizás el artista, en su doble faceta de pintor y enseñante, no ha podido sustraerse al uso de ciertos objetos matemáticos en el diseño de su mapa multicolor.

Vicente MEAVILLA SEGUÍ

I.E.S. "Francés de Aranda" de Teruel

Dpto. de Matemáticas (Universidad de Zaragoza)



Stan Slutsky. 146

Estamos ante una figura aparentemente muy simple. Se reduce a una sucesión de octógonos inscritos cada uno en el anterior mediante una sencilla regla que nos da los puntos del perímetro de cada octógono que son vértices del siguiente.

Pero una mirada más atenta a la figura nos descubre aspectos que van más allá de la simple geometría.

Esta figura puede representar perfectamente el fluir de nuestra vida formada por la sucesión ininterrumpida de años y días. Cada día que vivimos se apoya en el anterior de forma que la experiencia que vamos acumulando modela e influye en los días que nos quedan por vivir. Además, al igual que ocurre en la figura, cada año de vida se nos hace más corto que los anteriores. De hecho exclamamos a veces: ¡Qué rápido pasa el tiempo!

En la figura los colores van cambiando suavemente, pero en algunas zonas hay un cambio más brusco. También nuestra vida fluye en forma continua, pero vivimos algunos momentos especiales en los que rompemos la monotonía y hacemos algo que tiene una mayor repercusión en nuestro futuro.

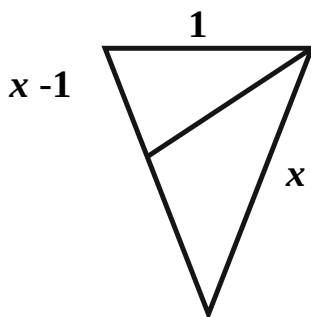
Y ¿qué ocurre en nuestra figura al final del proceso, cuando los octógonos se van empequeñeciendo? Observándola da una impresión de huida hacia una zona que se ve con mayor luminosidad. Aquí ya cada uno puede hacer una interpretación en función de la filosofía y creencias que tenga sobre el final de su existencia.

Yo creo que entre las diversas manifestaciones del arte existen unas conexiones internas que sólo puede descubrir el ser humano por la posibilidad que tiene para detectar la belleza.

Y digo esto porque la contemplación de esta figura también me sumerge en el mismo climax de paz y serenidad que ya he vivido anteriormente en muchas ocasiones escuchando la primera sinfonía de Brahms, sinfonía que como sabemos compuso en su madurez cuando ya rondaba los dos tercios de su existencia.

Y tratando de adivinar la conexión entre estas dos obras de arte, he escuchado atentamente una vez más esta gran sinfonía brahmsiana, y creo haber localizado el punto común en un pasaje del primer movimiento

Los picos de la estrella están formados por triángulos isósceles cuyos ángulos en la base son de 72° . Si trazamos la bisectriz de uno de los ángulos de la base obtenemos dos triángulos isósceles uno de los cuales es un triángulo semejante al triángulo original.



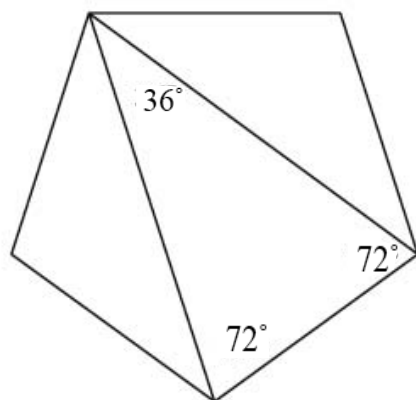
Si tomamos la base del triángulo como 1 y la longitud de los lados iguales como x , tenemos entonces que de la semejanza de los triángulos se tiene la relación:

$$x : 1 = 1 : (x - 1)$$

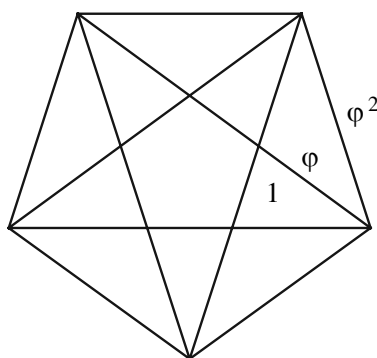
Por tanto x satisface la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$. La raíz positiva de esta ecuación es $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Este número es precisamente la razón áurea, también denotada por Φ . La estrella de cinco picos era muy apreciada por los Pitagóricos ya que los lados se cortan en la razón áurea.

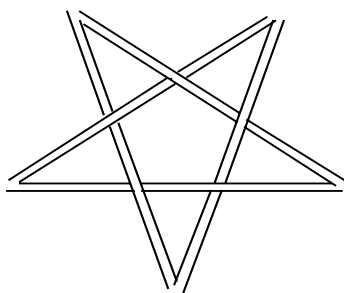
El pentágono regular se puede descomponer en tres triángulos isósceles. El triángulo de en medio tiene un ángulo de 36° y dos de 72° , por lo que la razón de la diagonal al lado del pentágono es también la razón dorada.



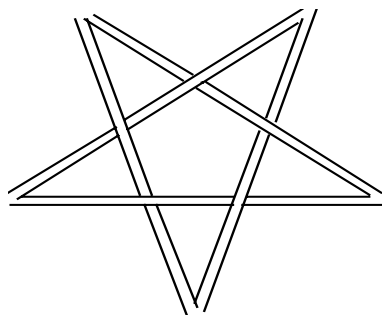
Si la longitud del lado del pentágono interior es 1, entonces la longitud del lado del pentágono exterior será Φ^2 .



El rosetón tiene simetría rotacional de 72° , esto es, es invariante ante rotaciones de 72° y múltiplos de este ángulo. Si rotamos 72° obtendremos una figura idéntica a la original. Después de cinco de estas rotaciones los vértices vuelven a sus posiciones originales. Como en esta celosía los lados se entrelazan y pasan unos debajo de otros, el rosetón no tiene simetría bilateral. El rosetón no se puede sobreponer a su imagen reflejada.



Centro del rosetón



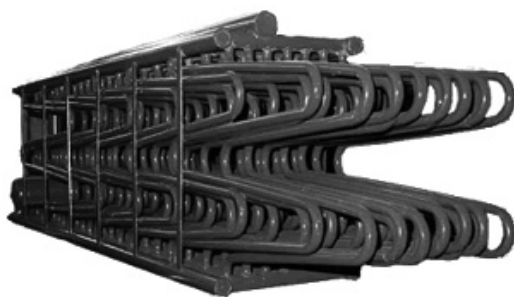
Reflexión

Alfinio FLORES
Arizona State University
Division of Curriculum and Instruction



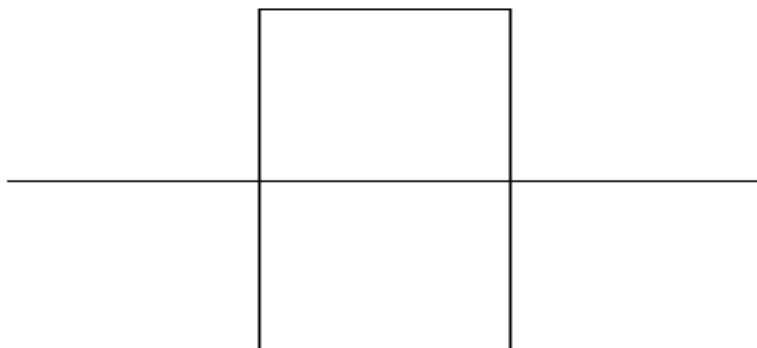
Carlo H. Séquin. *Hilbert 512 3D* (2005)

Aunque a primera vista esta escultura de Carlo H. Séquin (Universidad de Berkeley) pueda parecer un serpentín de cualquier caldera o refrigerador (optimizado para obtener la mayor longitud en el menor espacio posible), o incluso una recreación más o menos libre del cerebro con sus pliegues y lóbulos bien definidos una y otra vez; nada más lejos de la realidad, se trata de un paso al espacio (3D) de la curva de Hilbert.

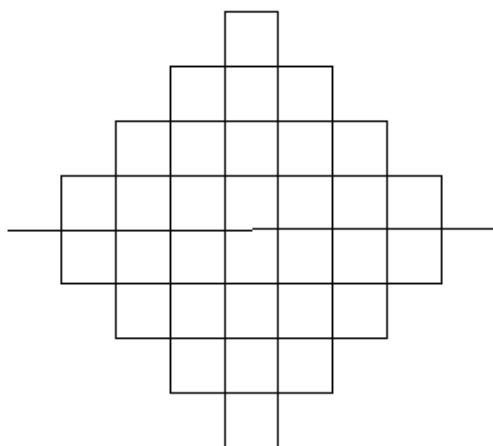


Hagamos un poco de historia: en 1890 Giuseppe Peano (1858-1932) publicó un artículo titulado “**Sur une courbe qui remplit toute une aire plane**”. Esta curva, como la de Hilbert (1862-1943), tiene la propiedad notable de “llenar” el plano, en el sentido de que pasa por cualquier punto, por ejemplo, del cuadrado unidad.

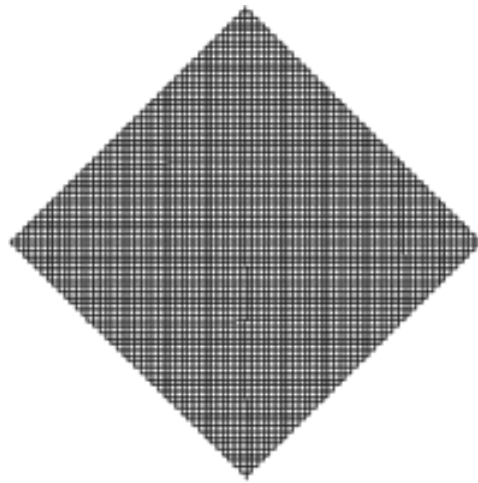
Para construir la *curva de Peano* se puede actuar así: (i) se parte de un segmento de longitud unidad, (ii) se toman 9 nuevos segmentos, cada uno de longitud $1/3$, y se colocan de la forma siguiente:



(iii) se procede de forma similar sobre los nuevos segmentos,



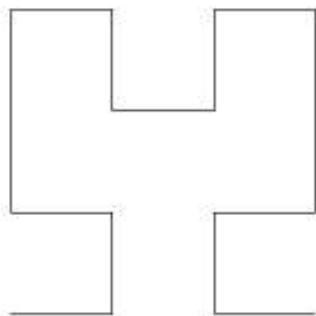
Si se sigue aplicando la fórmula recursiva llegaría a llenarse todo el área del cuadrado:



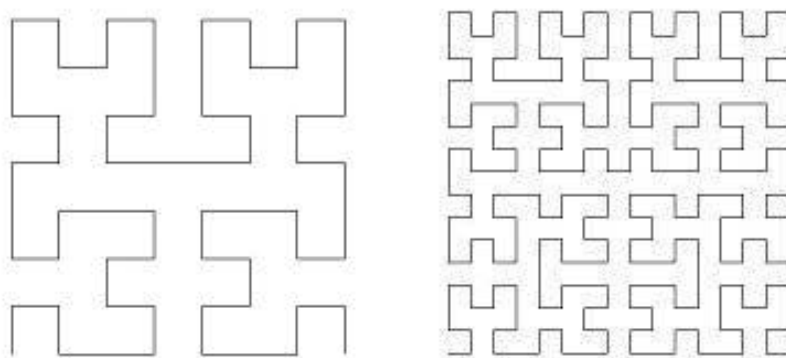
La curva de Hilbert fue descrita, por éste en 1891. Comienza con un línea compuesta de 3 segmentos, cada uno de longitud unidad, que conecta los centros de cuatro cuadrantes:



En la etapa siguiente se realizan cuatro copias de la figura inicial, reducidas en la proporción $1/3$, y se colocan en los cuadrantes. Se observa que para construir esta nueva figura, es necesario unir las copias de la anterior con tres segmentos de longitud $1/2$.



Para realizar una nueva iteración, se hacen cuatro copias de la figura inicial, reducidas en la proporción $1/2$, se colocan como se indica y se unen las copias mediante tres segmentos, ahora de tamaño $1/4$. Se observa, así, que el objeto que resulta no es estrictamente autosemejante.



Y siguiendo con el proceso:

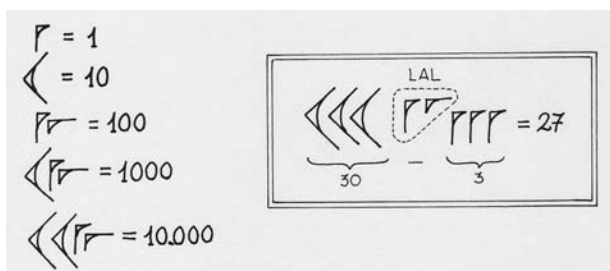
Apéndice para los aficionados a las Matemáticas

1. Sistemas de numeración: algo de historia

1.1. La numeración en el valle del Tigris y el Éufrates

Los antiguos babilonios utilizaron, además de algunos sistemas mixtos, de uso en las transacciones de la vida ordinaria, dos sistemas de numeración, a saber: uno decimal (de base 10) y otro sexagesimal (de base 60).

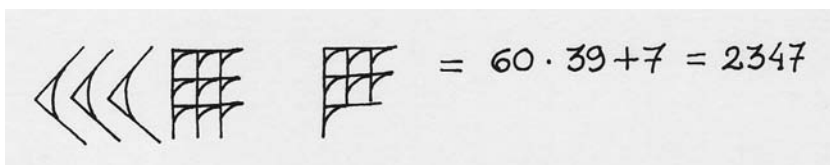
En el sistema decimal, cada signo se podía repetir hasta nueve veces. Cuando el número de repeticiones era mayor que tres, los signos se disponían en filas (dos o tres) colocadas una sobre otra. En algunos casos se utilizaba el principio sustractivo, mediante la introducción de un símbolo especial llamado “lal”.



Símbolos del sistema decimal babilónico (José A. Canteras)

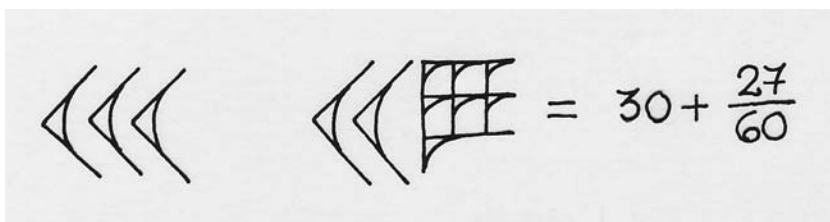
Desde un punto de vista matemático, resulta mucho más interesante el sistema de numeración sexagesimal, utilizado exclusivamente en los textos de contenido puramente matemático o astronómico. En este sistema, los números naturales superiores a 59 se expresaban según las potencias de 60. También se usó el “principio de posición” en virtud del cual el valor de una cifra depende del lugar que ocupa. Hasta el año 200 a. C. no se encuentra en los textos babilonios un signo especial para el cero.

El sistema de base 60 también se utilizó para representar fracciones. La ambigüedad con respecto a las fracciones y los números naturales se superaba por el contexto, a partir del cual se podía establecer el valor de cualquier número escrito sexagesimalmente.



$$\text{Three groups of three chevrons and one group of seven vertical bars} = 60 \cdot 39 + 7 = 2347$$

Representación sexagesimal del número 2347 (José A. Canteras)



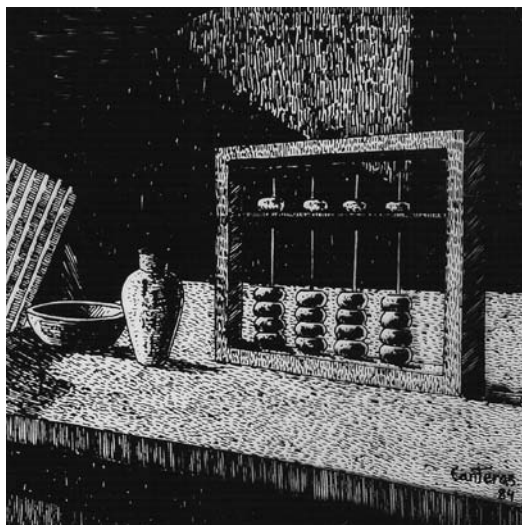
$$\text{Three chevrons and a chevron with seven vertical bars} = 30 + \frac{27}{60}$$

Fracciones en el sistema sexagesimal babilónico (José A. canteras)

1.2. Los numerales egipcios

El sistema de numeración utilizado por los egipcios era decimal. El símbolo unidad de cada orden se podía repetir hasta nueve veces; cuando el número de repeticiones era mayor que cuatro o cinco, los signos del mismo orden se distribuían en dos o tres filas (una sobre otra). Los números se escribían de izquierda a derecha o de derecha a izquierda. En ambos casos, las cifras de orden superior iban antes que las de orden inferior.

Con el paso del tiempo, las columnas fueron reemplazadas por hilos o varillas de alambre (fijadas en un bastidor) y los guijarros por cuentas ensartadas en los alambres. De este modo pudo surgir el ábaco.

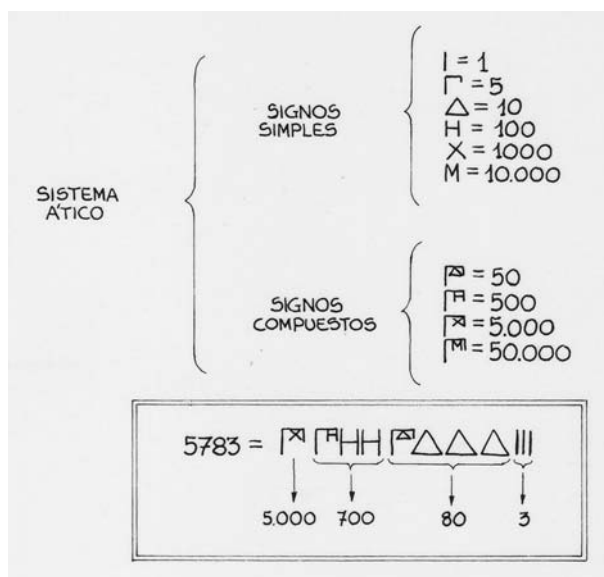


José A. Canteras. Ábaco

La tradición atribuye a Pitágoras la introducción del ábaco en Grecia. Siguiendo a Boecio (s. VI), los pitagóricos utilizaron en el ábaco nueve signos, llamados ápices, cuya forma era similar a la de los signos indo-arábigos.

En una fecha sobre la cual no hay acuerdo entre los investigadores, los griegos tuvieron la original idea de representar los números mediante las letras de su alfabeto. Así, en el sistema de numeración ático, todos los números (hasta el 50000) se escribían a partir de seis símbolos simples y cuatro compuestos, teniendo en cuenta las dos reglas siguientes:

- a) Cada signo simple se podía repetir, a lo sumo, cuatro veces.
- b) Los símbolos de los órdenes superiores se disponían a la izquierda de los signos de los órdenes inferiores.



Sistema de numeración ático (José A. Canteras)

En el sistema de numeración alfabético se utilizaron veintisiete letras distribuidas en tres grupos de nueve letras cada uno. El primer grupo denotaba las unidades; el segundo, las decenas; el tercero, las centenas. Para distinguir las letras que representaban números de las que formaban parte del texto se solía colocar un trazo horizontal sobre cada signo o conjunto de signos.

SISTEMA ALFABÉTICO	PRIMER GRUPO (UNIDADES)	$\overline{\alpha} \overline{\beta} \overline{\gamma} \overline{\delta} \overline{\epsilon} \overline{\zeta} \overline{\eta} \overline{\theta}$ 1 2 3 4 5 6 7 8 9
	SEGUNDO GRUPO (DECENAS)	$\overline{\iota} \overline{\kappa} \overline{\lambda} \overline{\mu} \overline{\nu} \overline{\xi} \overline{\omicron} \overline{\pi} \overline{\varphi}$ 10 20 30 40 50 60 70 80 90
	TERCER GRUPO (CENTENAS)	$\overline{\rho} \overline{\sigma} \overline{\tau} \overline{\upsilon} \overline{\phi} \overline{\chi} \overline{\psi} \overline{\omega} \overline{\tau\delta}$ 100 200 300 400 500 600 700 800 900

792 = $\overline{\psi} \overline{\varphi} \overline{\beta}$

Sistema de numeración alfabético (José A. Canteras)

MILLARES	$\overline{\alpha}$	$\overline{\beta}$	$\overline{\gamma}$	$\overline{\delta}$	$\overline{\epsilon}$	$\overline{\varsigma}$	$\overline{\zeta}$	$\overline{\eta}$	$\overline{\theta}$
	1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000
MIRIADAS	$\overline{M}$	$\overline{B}$	$\overline{r}$	$\overline{\delta}$	$\overline{\epsilon}$	$\overline{s}$	$\overline{\zeta}$	$\overline{\eta}$	$\overline{\theta}$
	10.000	20.000	30.000	40.000	50.000	60.000	70.000	80.000	90.000

Las fracciones se designaban escribiendo primero el numerador (marcado con un acento) y luego el denominador (marcado con dos acentos) y escrito dos veces. En el caso de fracciones unitarias se suprimía el numerador y el denominador sólo se escribía una vez.

$$\frac{2}{15} = \beta' \quad l \in'' \quad l \in''$$

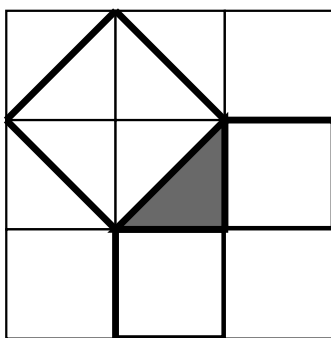
$$\frac{1}{16} = \overline{LS''}$$

258

2. Tres demostraciones elementales del teorema de Pitágoras

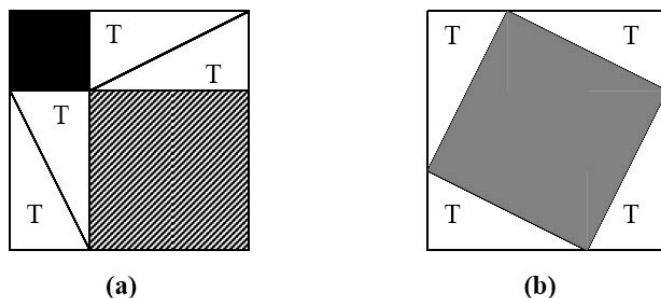
2.1. Una demostración egipcia

Algunos historiadores opinan que los antiguos egipcios estuvieron en condiciones de demostrar el “teorema del triángulo rectángulo” para el caso particular de un triángulo rectángulo isósceles. Esta hipótesis no resulta descabellada dado que la simple contemplación de un suelo cubierto con baldosas cuadradas conduce, de forma rápida, a la conclusión de que el cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles es equivalente a los cuadrados construidos sobre los catetos [véase la figura adjunta].



Resulta obvio que, tomando como unidad de área la mitad de cualquier baldosa cuadrada, el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo gris es 4. Por otro lado, el área de cada uno de los cuadrados construidos sobre los catetos es 2. Dado que $4 = 2 + 2$, el teorema de Pitágoras queda probado.

2.2. Una demostración atribuida a Pitágoras



Los cuadrados (a) y (b) de la figura anterior son equivalentes [= tienen la misma área = sus lados tienen la misma longitud].

El cuadrado (a) está compuesto por cuatro triángulos rectángulos congruentes (T) y dos cuadrados, uno negro y otro rayado. La longitud del lado del cuadrado negro coincide con la del cateto menor de cualquiera de los triángulos T. La longitud del lado del cuadrado rayado coincide con la del cateto mayor de cualquiera de los triángulos T.

El cuadrado (b) está compuesto por cuatro triángulos rectángulos congruentes (T) y un cuadrado gris cuyo lado tiene la misma longitud que la hipotenusa de cualquiera de los triángulos T.

Con esto, si del cuadrado (a) suprimimos los cuatro triángulos T y del cuadrado (b) eliminamos los cuatro triángulos T, entonces el área del cuadrado gris es igual al área del cuadrado negro más el área del cuadrado rayado.

Es decir:

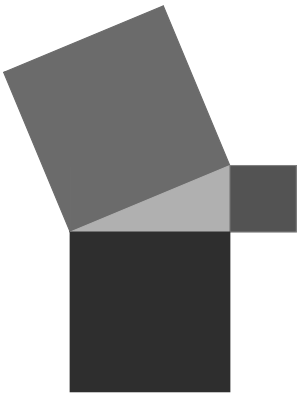
El cuadrado construido sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo T es equivalente a los cuadrados construidos sobre sus catetos.

2.3. La demostración de Thabit ibn Qurra

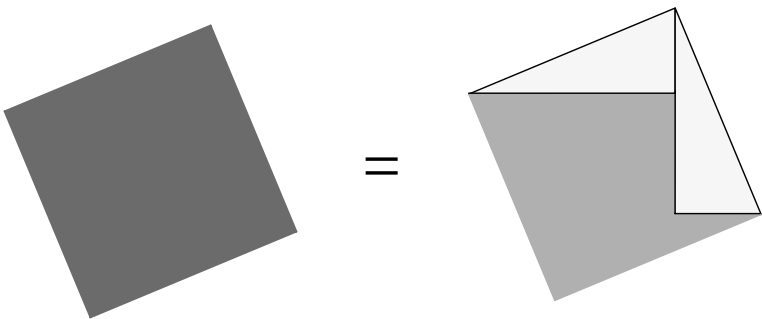
En la sección 2.3.1. del capítulo 2 [Demostraciones cromáticas] nos hemos referido a la demostración que del teorema de Pitágoras hizo el matemático árabe Thabit ibn Qurra allá por el siglo IX.

Para comprender la belleza y sencillez de dicha prueba nos serviremos de un rompecabezas compuesto por tres piezas.

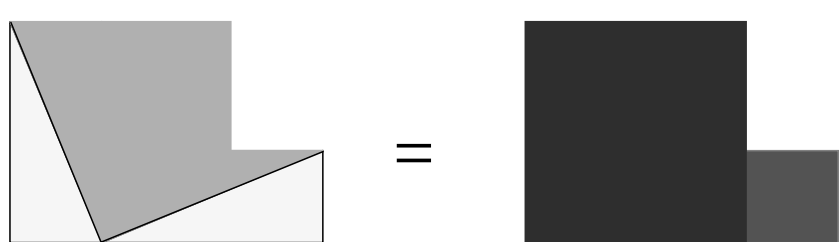
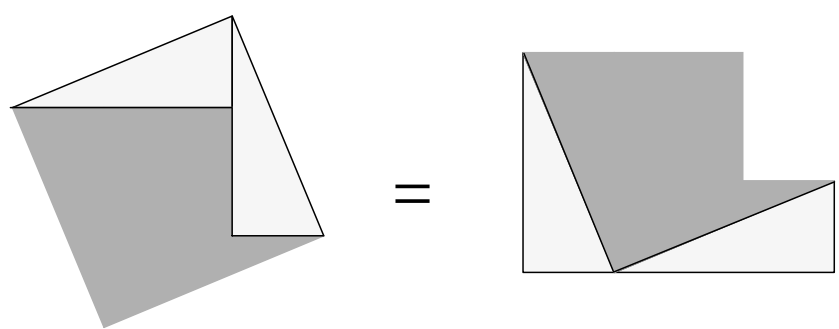
Queremos demostrar que el área del cuadrado rojo, construido sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo azul, es igual a la suma de las áreas de los cuadrados azules construidos sobre sus catetos (véase el diagrama siguiente).



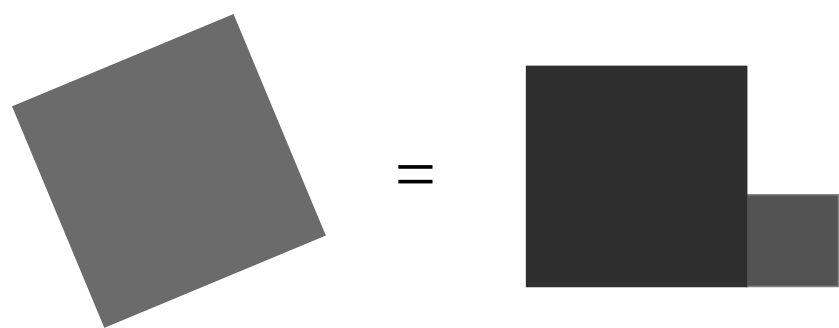
Para ello descomponemos el cuadrado rojo en dos triángulos rectángulos amarillos (congruentes al triángulo rectángulo azul) y un pentágono cóncavo gris. Estos tres polígonos son las piezas del rompecabezas que vamos a utilizar para la demostración.



A partir de esta descomposición, la demostración del teorema de Pitágoras resulta visualmente evidente si atendemos a la sucesión de diagramas siguiente:



Por tanto:



3. División de un segmento en media y extrema razón: el número áureo

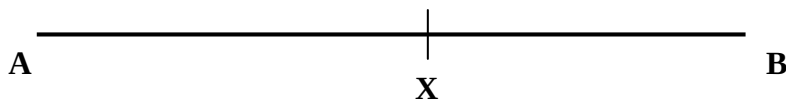
3.1. División de un segmento en media y extrema razón

En la proposición 11 del libro II de los Elementos de Euclides (ca. 300 a. C.) se plantea el problema siguiente:

Dividir una recta en dos partes de modo que el rectángulo comprendido por la recta entera y por una de sus partes sea equivalente al cuadrado de la otra parte.

Dicha proposición puede enunciarse en los siguientes términos y equivale a la división de un segmento rectilíneo en media y extrema razón:¹

Dividir un segmento rectilíneo AB en dos partes desiguales AX y XB de modo que la razón entre la parte mayor y la menor (AX / XB) sea igual a la razón entre el segmento total y la parte mayor (AB / AX).



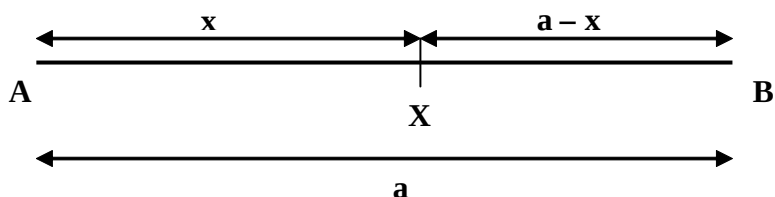
Dicho problema ya fue conocido por los antiguos pitagóricos dado que su solución era necesaria para dibujar el “pentalfa” [= pentágono regular estrellado], símbolo de la hermandad pitagórica.

Si el punto X divide al segmento AB en media y extrema razón se dice que AX es el segmento áureo de AB.

¹ En su obra *De divina proportione*, el matemático italiano Luca Pacioli (ca. 1445 – 1509) introdujo el término “divina proporción” para referirse a la división de un segmento en media y extrema razón.

3.1.1. Cómo dividir un segmento rectilíneo en media y extrema razón o cómo hallar el segmento áureo de un segmento rectilíneo dado

Sea AB el segmento rectilíneo dado. Sea X el punto que lo divide en media y extrema razón.



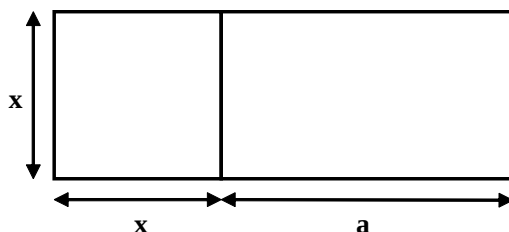
Entonces:

$$AX / XB = AB / AX \Rightarrow x / (a - x) = a / x \Rightarrow x^2 = a(a - x) \Rightarrow x^2 + ax = a^2$$

En otras palabras:

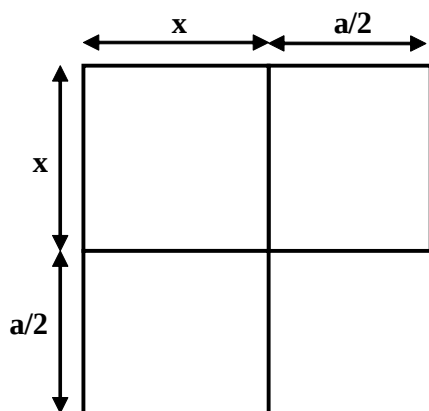
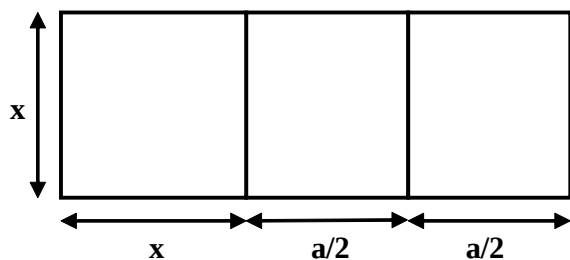
El problema de dividir un segmento rectilíneo $AB = a$ en media y extrema razón equivale a resolver la ecuación cuadrática $x^2 + ax = a^2$ o la $x(x + a) = a^2$ [1].

Vamos a resolver la ecuación [1] utilizando un procedimiento geométrico, con la esperanza de que dicha resolución gráfica nos indique el camino que debemos seguir para determinar el punto X que divide al segmento AB en media y extrema razón.



El diagrama anterior es el dibujo del primer miembro de la ecuación [1]. En consecuencia, el área del rectángulo de dimensiones x y $a + x$ es a^2 .

Por tanto, el área de cada uno de los diagramas siguientes también es a^2 .



Ahora bien, el área del polígono cóncavo representado en la última figura es igual a $[x + (a/2)]^2 - (a/2)^2$. Dicho en otras palabras:

$$\left[x + \left(\frac{a}{2} \right) \right]^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 = a^2$$

De donde:

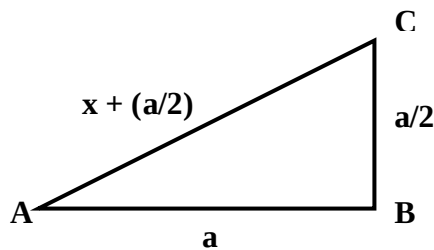
$$\left[x + \left(\frac{a}{2} \right) \right]^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2} \right)^2$$

Es decir:

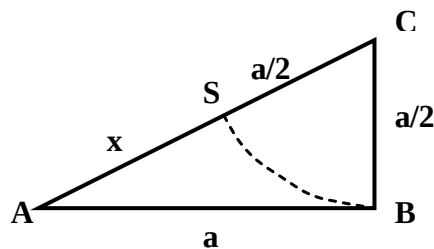
El segmento rectilíneo $x + (a/2)$ es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son a y $a/2$.

Por tanto, para determinar la longitud del segmento x [= segmento áureo del segmento $AB = a$] deberemos proceder del modo siguiente:

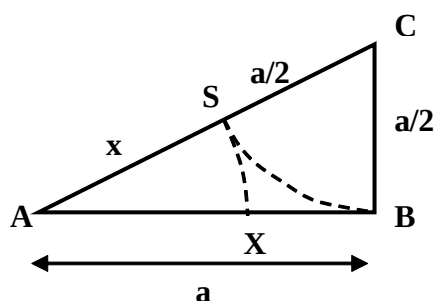
[1] Dibujar un triángulo rectángulo ABC de catetos a y $a/2$.



[2] Con centro en C y radio CB [= $a/2$] describir un arco de circunferencia que corta a la hipotenusa en el punto S. Con esto se tiene que $CS = a/2$ y $SA = x$.

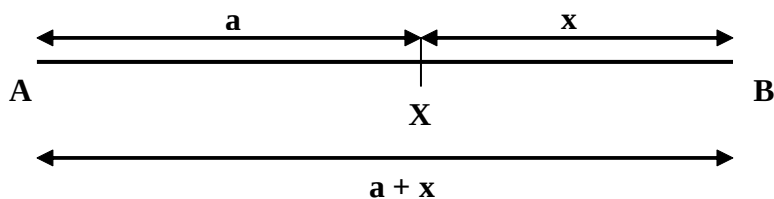


[3] Con centro en A y radio AS [= x] describir un arco de circunferencia que corta al cateto AB [= a] en el punto X. Con esto se tiene que AX [= x] es el segmento áureo del segmento AB.



3.1.2. Dado el segmento áureo de un segmento rectilíneo, construir dicho segmento

Sea $AX = a$ el segmento áureo de un segmento $AB = a + x$.



Entonces:

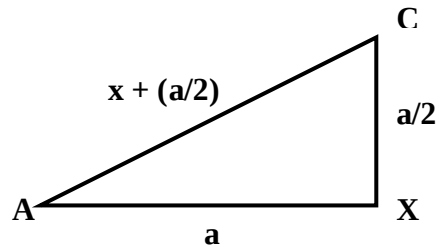
$$AB / AX = AX / XB \Rightarrow (a + x) / a = a / x \Rightarrow x(a + x) = a^2$$

Siguiendo un razonamiento análogo al del apartado anterior se llega al resultado siguiente:

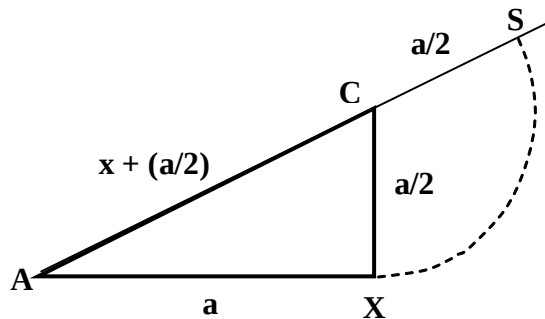
El segmento rectilíneo $x + (a/2)$ es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son a y $a/2$.

Por tanto, para determinar la longitud del segmento $a + x$ [= AB = segmento rectilíneo cuyo segmento áureo es $AX = a$] deberemos proceder del modo siguiente:

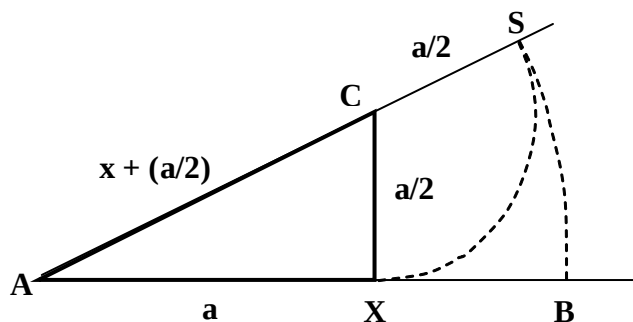
[1] Dibujar un triángulo rectángulo AXC de catetos a y $a/2$.



[2] Con centro en C y radio CX [= $a/2$] describir un arco de circunferencia que corta a la prolongación de la hipotenusa en el punto S. Con esto se tiene que $AS = a + x$.



[3] Con centro en A y radio AS [= $a + x$] se describe un arco de circunferencia que corta a la prolongación del cateto AX en el punto B. Con esto se tiene que AB es el segmento rectilíneo cuyo segmento áureo es $AX = a$.



3.2. El número áureo

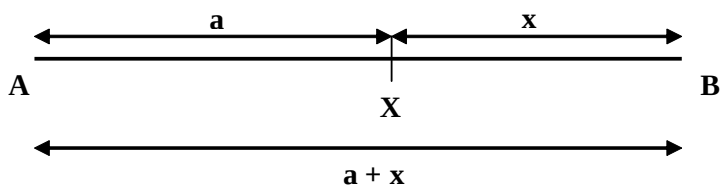
Sea AB un segmento rectilíneo y X el punto interior a él que lo divide en media y extrema razón.

Entonces:

$$AB / AX = AX / XB = \Phi$$

El número Φ ("phi") se llama número áureo.

3.2.1. Cálculo de Φ



$$AB / AX = AX / XB \Rightarrow \frac{a+x}{a} = \frac{a}{x} \Rightarrow 1 + \frac{x}{a} = \frac{a}{x} \Rightarrow 1 + \frac{1}{\Phi} = \Phi \Rightarrow \Phi^2 = 1 + \Phi$$

Por tanto, Φ es la raíz positiva de la ecuación cuadrática $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$

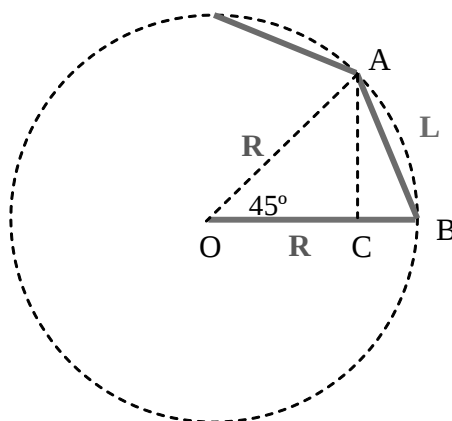
De donde:

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618034...$$

4. Rectángulos cordobeses

Un rectángulo cordobés es aquel que tiene sus dimensiones en la misma razón que el radio [R] de una circunferencia y el lado del octógono regular [L] inscrito en ella.

Para calcular la razón $\frac{R}{L}$ prestemos atención a la figura siguiente en la que se representa la cuarta parte de un octógono regular inscrito en una circunferencia de radio R.



Si $AC = OC = x$, entonces $CB = R - x$.

Aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos rectángulos ACO y ABC, se tiene que:

$$2x^2 = R^2 \Rightarrow R = x\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} L^2 &= x^2 + (R - x)^2 = x^2 + R^2 + x^2 - 2Rx = x^2 + 2x^2 + x^2 - 2x(x\sqrt{2}) = \\ &= 4x^2 - 2x^2\sqrt{2} = 2x^2(2 - \sqrt{2}) \Rightarrow L = x\sqrt{2}(\sqrt{2 - \sqrt{2}}) \end{aligned}$$

Capítulo 1

Números artísticos •	13
1.1. Numerales imposibles •	14
1.2. El cinco •	15
1.2.1. El sexo de los números •	15
1.2.2. Teselaciones hiperbólicas •	16
1.3. Cuadrados mágicos •	19
1.4. Tobia Ravà, un pitagórico italiano moderno •	21
1.4.1. Introducción •	21
1.4.2. Tobia Ravà, un artista peculiar •	23
1.4.3. Los numerales indo-arábigos y el arte •	24
1.5. Los números y el diseño •	27

Capítulo 2

Demostraciones cromáticas •	31
2.1. Suma infinita •	32
2.2. Teoremas pitagóricos •	34
2.2.1. Primer teorema •	34
2.2.2. Segundo teorema •	37
2.2.3. Tercer teorema •	38
2.2.4. Cuarto teorema •	40
2.3. Teorema de Pitágoras •	41
2.3.1. El ingenio de Thabit •	42
2.3.2. Una imagen dice más que mil palabras •	42
2.3.3. Implicaciones artísticas •	43
2.4. Teorema de Viviani •	45

Capítulo 3

Arte poligonal •	51
3.1. Triángulos •	52
3.1.1. La espiral de Teodoro de Cirene •	52
3.1.2. Los triángulos de Pascal y Sierpinski •	55
3.1.3. Minimalismo triangular •	57
3.1.4. Poligonales asociadas a un triángulo equilátero •	59
3.2. Cuadrados •	61
3.2.1. (Homenaje) ² •	61
3.2.2. Sucesión de cuadrados •	63
3.2.3. OP ART cuadrado •	64
3.2.4. Cuadrados en el espacio •	66
3.3. Rectángulos •	67
3.3.1. Rectángulos áureos •	67
3.3.2. Rectángulos cordobeses •	69
3.3.3. Rectángulos recíprocos •	71
3.4. Pentágonos regulares y pentágonos regulares estrellados •	72
3.5. Hexágonos •	77
3.5.1. ¿Hexágonos? ¿Cubos? ¿Triedros? •	77
3.5.2. Hexágonos (estrellados) comprometidos •	78
3.5.3. Hexágonos OPticamente ARTísticos •	79
3.5.4. Hexágonos para mirar •	80
3.6. Polígonos de ocho lados •	81

Capítulo 4

El discreto encanto de las curvas •	87
4.1. Las cónicas •	87
4.1.1. La curva más bella •	89
4.1.2. La elipse •	92
4.1.3. La curva de los puentes, de los jardines. . . •	94
4.1.4. Una cónica con dos ramas •	98

4.2. Las funciones trigonométricas •	99
4.3. Matemáticas enrolladas •	102
4.3.1. La espiral de Arquímedes •	102
4.3.2. La espiral $2\sqrt{2}$ •	104
4.3.3. La espiral de Durero •	105
4.4. Matemáticas encadenadas •	105

Capítulo 5

Poliedros: las mil caras del arte •	109
5.1. El poliedro regular terrestre •	109
5.1.1. Esculturas cúbicas •	110
5.1.2. Cubos 2D •	122
5.1.3. Del espacio al plano •	123
5.2. Un poliedro ardiente •	124
5.3. Un sólido aéreo •	125
5.4. El icosaedro, señor del agua •	126
5.5. El poliedro universal •	127
5.6. Poliedros extraños •	129
5.7. Arquímedes y sus poliedros •	133
5.8. Prismas y pirámides •	137

Capítulo 6

Geometría tridimensional redondeada •	143
6.1. Esferas artísticas •	143
6.2. Redondeados y puntiagudos •	147
6.3. Cilindros •	149
6.3.1. Geometría vegetal y esculturas cilíndricas •	149
6.3.2. Del bosque a la ciudad •	154
6.3.3. Cilindro humano •	155
6.3.4. Cilindros imposibles y cilindros enrollados •	157
6.4. Los elipsoides: parientes tridimensionales de las elipses •	158

Capítulo 7

La belleza de las superficies regladas •	161
7.1. Esculturas regladas •	162
7.2. Hiperboloides de una hoja •	164
7.3. Eladio Dieste, el Gaudí latinoamericano •	168
7.4. Bóvedas acuáticas •	169
7.5. Superficies regladas en la Plana Baixa •	171

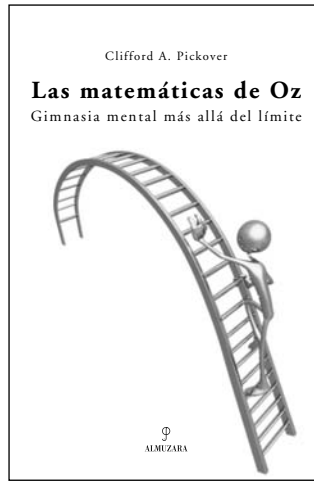
Capítulo 8

Miscelánea •	175
8.1. La banda de Moebius •	175
8.2. La sucesión de Fibonacci •	177
8.3. Breve antología de textos y citas matemático-artísticas •	181
8.4. Mosaicos •	183
8.5. El arte de ilustrar •	185
8.6. Matelogos •	188
8.7. Rombododecaedro modernista •	190
8.8. Stella octangula •	192
8.9. Anillos de Borromeo •	194
8.10. La geometría de los símbolos •	196
8.11. Nudos artísticos •	199
8.12. Vamos de compras •	200

Capítulo 9

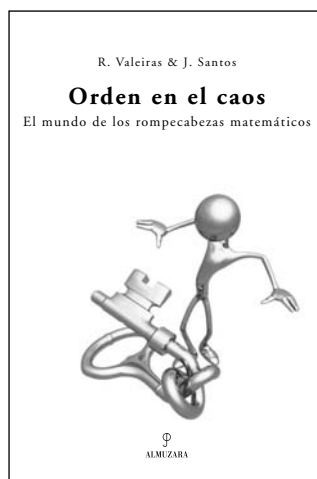
Galería de imágenes comentadas •	203
Apéndice para los aficionados a las Matemáticas •	253
1. Sistemas de numeración: algo de historia •	253
1.1. La numeración en el valle del Tigris y el Éufrates •	253
1.2. Los numerales egipcios •	254
1.3. Letras y números en Grecia •	255

2. Tres demostraciones elementales del teorema de Pitágoras •	259
2.1. Una demostración egipcia •	259
2.2. Una demostración atribuida a Pitágoras •	260
2.3. La demostración de Thabit ibn Qurra •	261
3. División de un segmento en media y extrema razón: el número áureo •	263
3.1. División de un segmento en media y extrema razón •	263
3.1.1. Cómo dividir un segmento rectilíneo en media y extrema razón o cómo hallar el segmento áureo de un segmento rectilíneo dado •	264
3.1.2. Dado el segmento áureo de un segmento rectilíneo, construir dicho segmento •	267
3.2. El número áureo •	269
3.2.1. Cálculo de Φ •	269
4. Rectángulos cordobeses •	270
5. Rectángulos recíprocos •	271
6. El pentágono regular y el número áureo •	272
7. Unas palabras sobre poliedros arquimedianos •	273
7.1. Pappus y los poliedros semirregulares •	273
7.2. El redescubrimiento de los poliedros arquimedianos •	277
7.3. Simon Stevin (1548-1620) y los poliedros arquimedianos •	281
7.4. Kepler, punto y final •	283
8. El fascinante mundo de los mosaicos •	284
8.1. Mosaicos regulares •	284
8.2. Mosaicos semirregulares •	285



Coja un lápiz. Relájese. Después despegue en un viaje alucinante hasta la última frontera de las matemáticas, la mente y el significado, mientras el aclamado autor Dr. Clifford Pickover, Dorotea y el Dr. Oz exploran algunos de los más extraños y peculiares caminos de aquellos obsesionados con los números. Preparase para una odisea conforme *Las matemáticas de Oz* abren las puertas de su imaginación. Misterios, acertijos y problemas que hacen reflexionar y que abarcan desde números cebra y primos circulares hasta números legión —un número tan grande que hace que un trillón parezca insignificante en comparación. Laberintos extraños, consecuencias raras y formaciones vertiginosas a través de problemas de lógica que le entretendrán en cualquier nivel de sofisticación matemática. Las pruebas elaboradas por el enigmático Dr. Oz para evaluar la inteligencia humana estimularán el cerebro de incluso el aficionado de acertijos más ávido. Ponga a prueba su ingenio con una variedad de tópicos matemáticos: geometría y laberintos, sucesiones, series, grupos, combinaciones, probabilidad y *misdirection*, teoría de números, aritmética e incluso problemas concernientes al mundo físico.

Con numerosas ilustraciones, ésta es una introducción original, divertida y totalmente única a los números y a su papel en la creatividad, ordenadores, juegos, investigación práctica y aventuras absurdas que están al borde de la lógica y la insensatez. *Las Matemáticas de Oz* le mantendrán en ascuas implorando aún más.



Los juegos matemáticos suponen un reto para nuestra propia capacidad mental. Desde los más simples, hasta los más complejos, su resolución nos estimula y nos permite desarrollar nuestras capacidades al tiempo que nos divierten.

Este libro presenta numerosos rompecabezas de diversa complejidad, analizados de forma clara y amena, tanto para los curiosos que quieran iniciarse como para los aficionados deseosos de profundizar en el infinito mundo de los puzzles. Se centra en rompecabezas, de movimientos secuenciales, al que pertenecen juegos tan famosos como el Cubo de Rubik o la Torre de Hanoi. Son puzzles de formas y características variadas, en dos o tres dimensiones: bloques deslizantes, intercambio de piezas, gravedad, plegado... Se han seleccionado algunos conocidos, otros menos conocidos e incluso algunos diseñados por los propios autores.

Si se decide a abrir el libro encontrará que bajo el aspecto caótico de los puzzles se puede encontrar cierto orden con restricciones, permutaciones, algoritmos y teoría de grupos; en definitiva, orden en el caos. Las leyes de las matemáticas funcionan también en ese ámbito.

Para entender los contenidos de este libro no se necesitan conocimientos avanzados de matemáticas. El lector aprenderá a ordenarlos siguiendo las indicaciones dadas, acompañadas de abundantes ilustraciones. En algunos casos, sólo se hacen unos análisis iniciales que le permitirán continuar investigando por su cuenta.