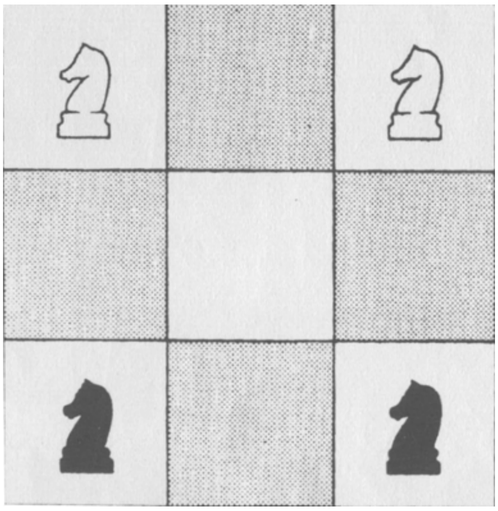
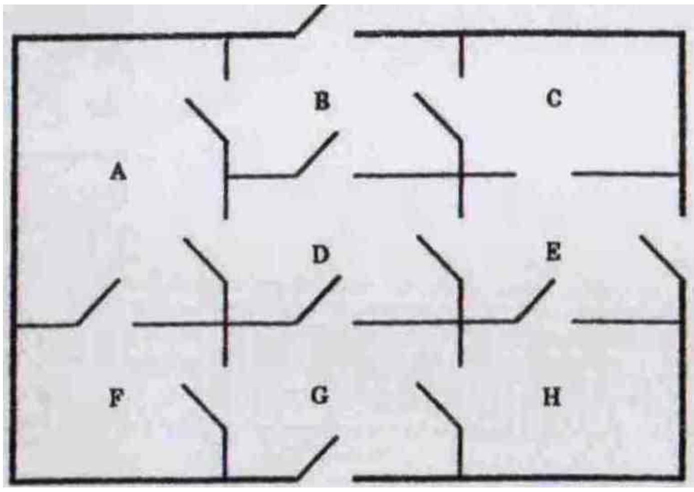
1.1 La danza de los caballos.



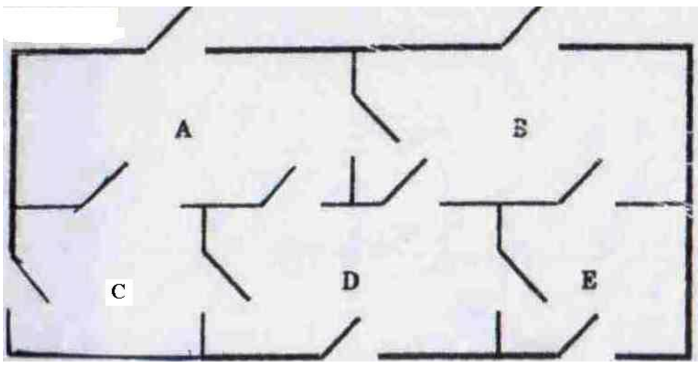
Sobre un tablero de ajedrez están colocados los dos caballos blancos y los dos negros, ocupando las esquinas de un cuadrado de dimensión 3x3, tal como indica la figura.
¿Cómo se podrían intercambiar los caballos negros y los blancos con el menor número de movimientos?

1.2. Jaque a los ladrones.

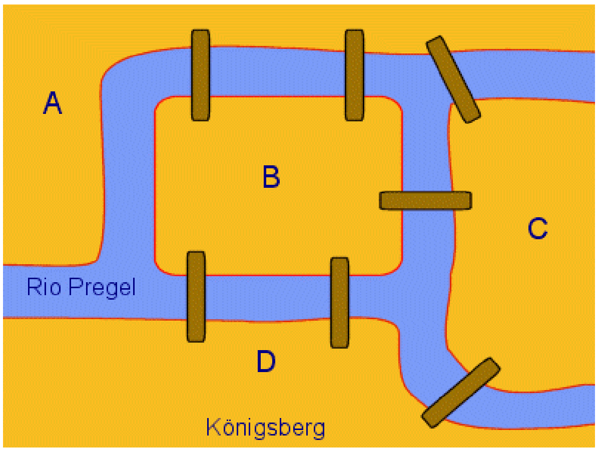
Cada noche, provisto de mi llavero, cruzo todas las puertas de mi casa cerrándolas una vez atravesadas. No vuelvo a abrir una puerta cerrada y duermo con mi llavero. **¿En qué habitación duermo?**



Ahora haz lo mismo con esta nueva casa.



1.3. Los Puentes de Köningsberg.

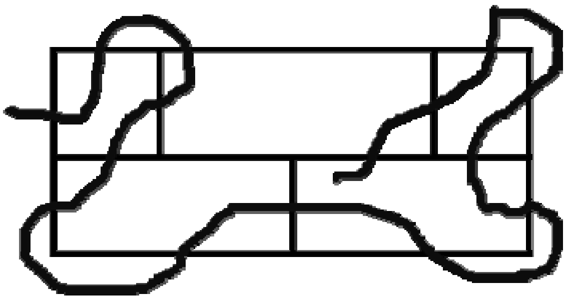


Fue Leonhard Euler quien ideó los grafos como una manera muy potente y elegante de resolver el problema de los puentes de Königsberg.

Königsberg (hoy Kaliningrado en Rusia) era en tiempos de Euler (siglo XVIII) una ciudad prusiana cruzada por siete puentes. Durante la época se suscitó la cuestión no resuelta de **si era posible recorrer toda la ciudad cruzando cada uno de los puentes una y sólo una vez**.

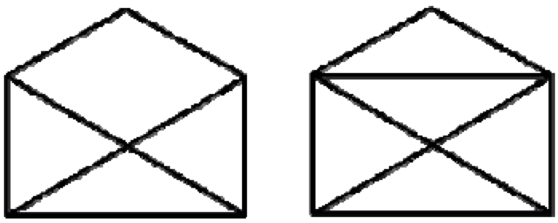
1.4. El cruce de la red.

Se trata de trazar una línea continua a través de la red cerrada de la figura, de modo que dicha línea **cruce cada uno de los 16 segmentos que componen la red una vez solamente**. La línea continua dibujada no es, evidentemente, una solución del problema, ya que deja un segmento sin cruzar. Se ha dibujado solamente a fin de hacer patente el significado del enunciado del problema.



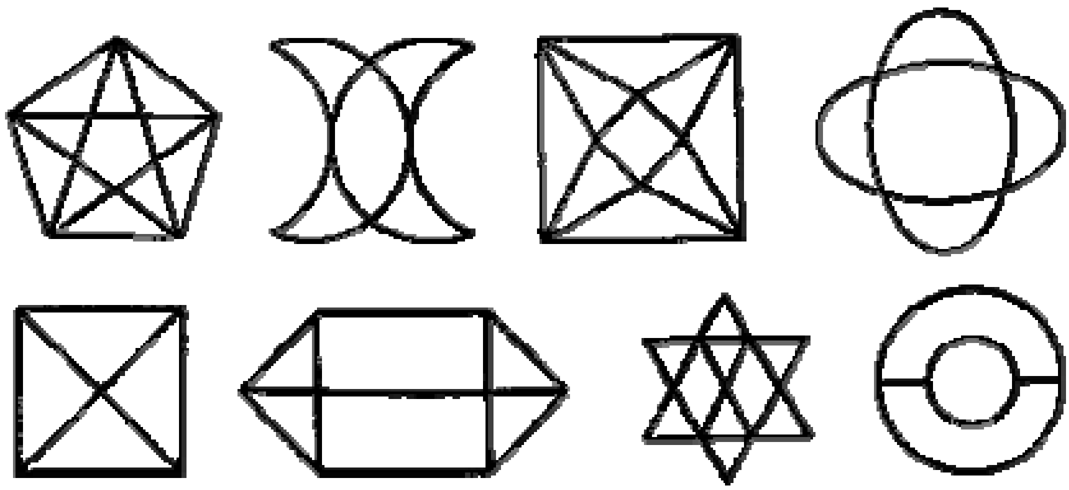
1.5. Dibujando sobres de un solo trazo, ¿posible o imposible?

En la figura tenemos dos sobres ligeramente diferentes ya que el segundo tiene una línea más, que marca el doblez de cierre. **¿Es posible dibujar cada uno de los sobres sin levantar el lápiz del papel, y sin pasar más de una vez por el mismo trazo?**



1.6. De un solo trazo.

De los 8 dibujos de la figura, ¿cuáles pueden **dibujarse de un sólo trazo** y cuáles no?



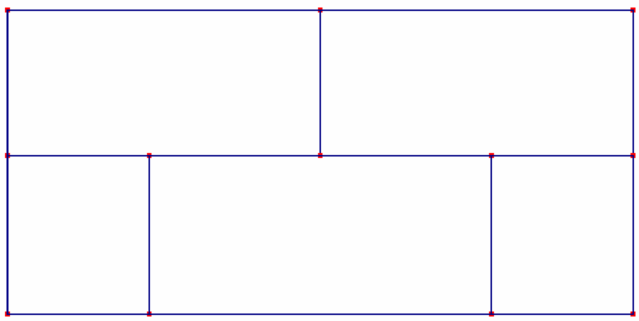
¿Sabrías hacer esto mismo saliendo de algún punto **y volviendo al mismo punto**?

Estudia, con ayuda de tus compañeros, los grafos que has resuelto hasta ahora. Fijándote en el grado de los vértices de cada uno, **¿podrías sacar alguna conclusión del por qué unos tienen solución y otros no?**

1.7. El grafo de Clausen.

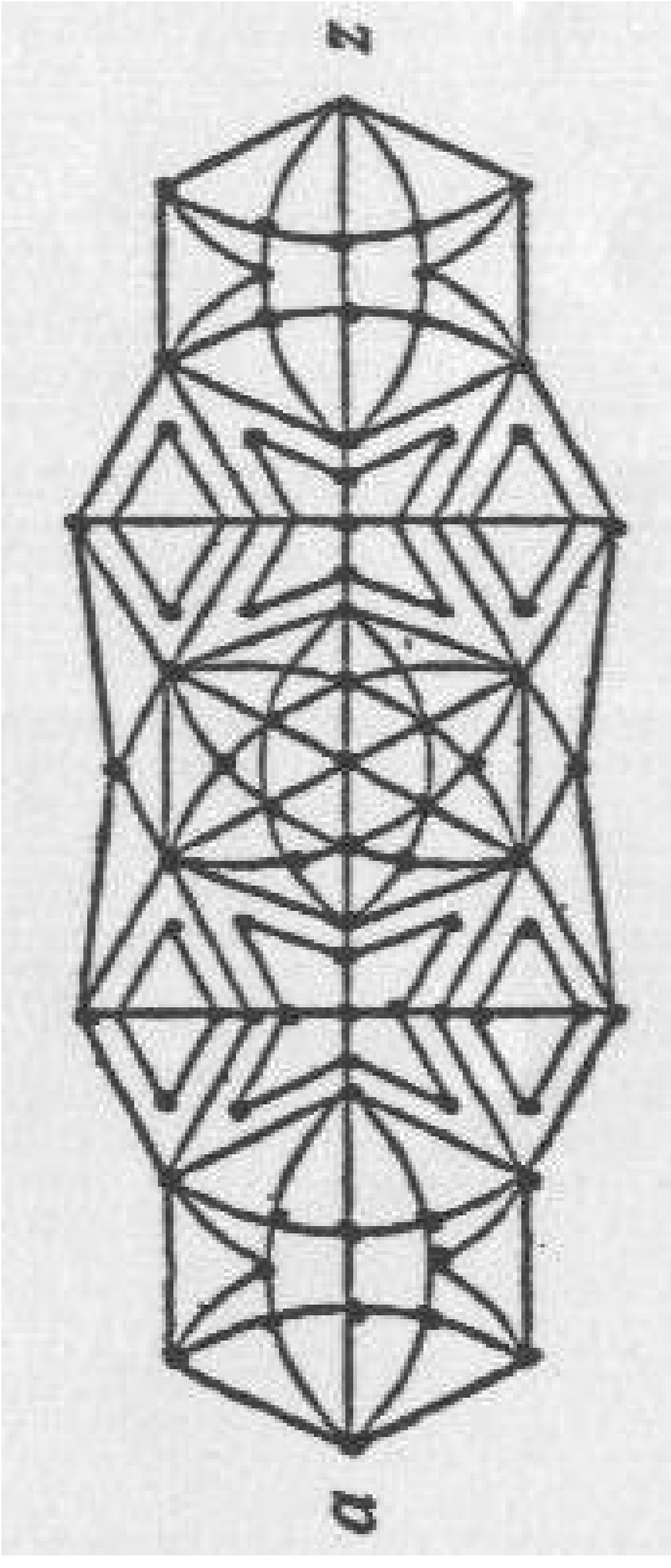
La figura representa un fragmento de muro de una fábrica.

¿Cuántos tramos continuos distintos necesitas para dibujarla?



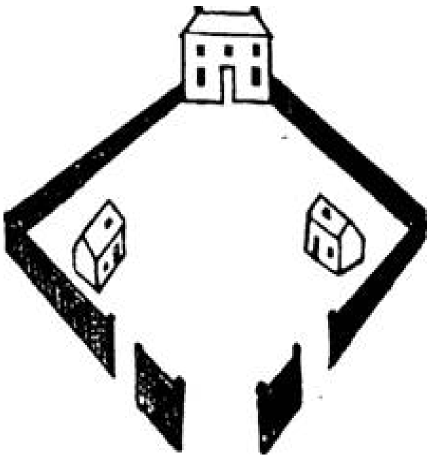
1.8. Grafo de Listing.

Intenta recorrer todas las líneas del grafo desde *a* hasta *z.*



1.9. Los vecinos belicosos. (http://www.acanomas.com/)

Se dice que tres vecinos que compartían un pequeño parque, como se ve en la ilustración, tuvieron una riña. El dueño de la casa grande, quejándose de que los pollos de su vecino lo molestaban, construyó un camino con cerca que iba desde su puerta a la salida que está en la parte inferior de la ilustración. Después el hombre de la derecha construyó un camino hasta la salida de la izquierda, y el hombre de la izquierda construyó un camino hasta la salida de la derecha. Ninguno de estos caminos se cruzaban.

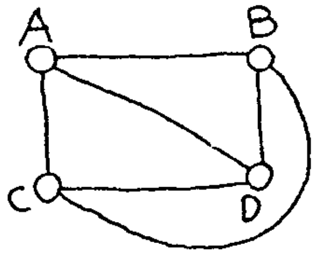


¿Puedes dibujarlos correctamente?

1.10. Las tres casas y los tres pozos y otros parecidos.

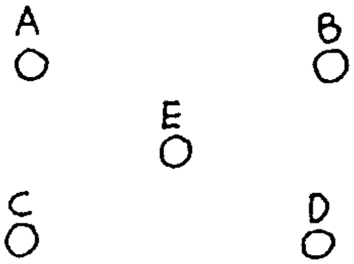
Empecemos por uno fácil :
Dados cuatro puntos en el plano A, B, C, D, unir cada uno a los otros tres mediante líneas rectas o curvas del plano **que no se crucen**. Cada línea debe contener sólo dos de los puntos. Piensa. Fácil ¿no?

La solución es :



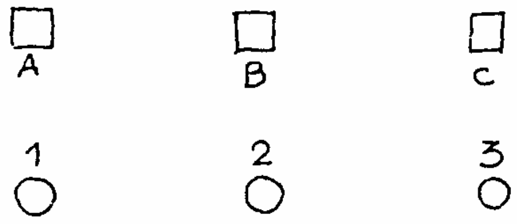
Ahora un poco más difícil:

Dados cinco puntos en el plano, **unir cada uno a los otros cuatro por líneas que no se crucen.**



Ahora al de las tres casas y los tres pozos:

Se dibujan tres casas y tres pozos. Los vecinos de las casas tienen, todos, el derecho de utilizar los tres pozos. Como no se llevan bien en absoluto, no quieren cruzarse jamás. **¿Es posible trazar los nueve caminos que juntan las tres casas con los tres pozos sin que haya cruces?**

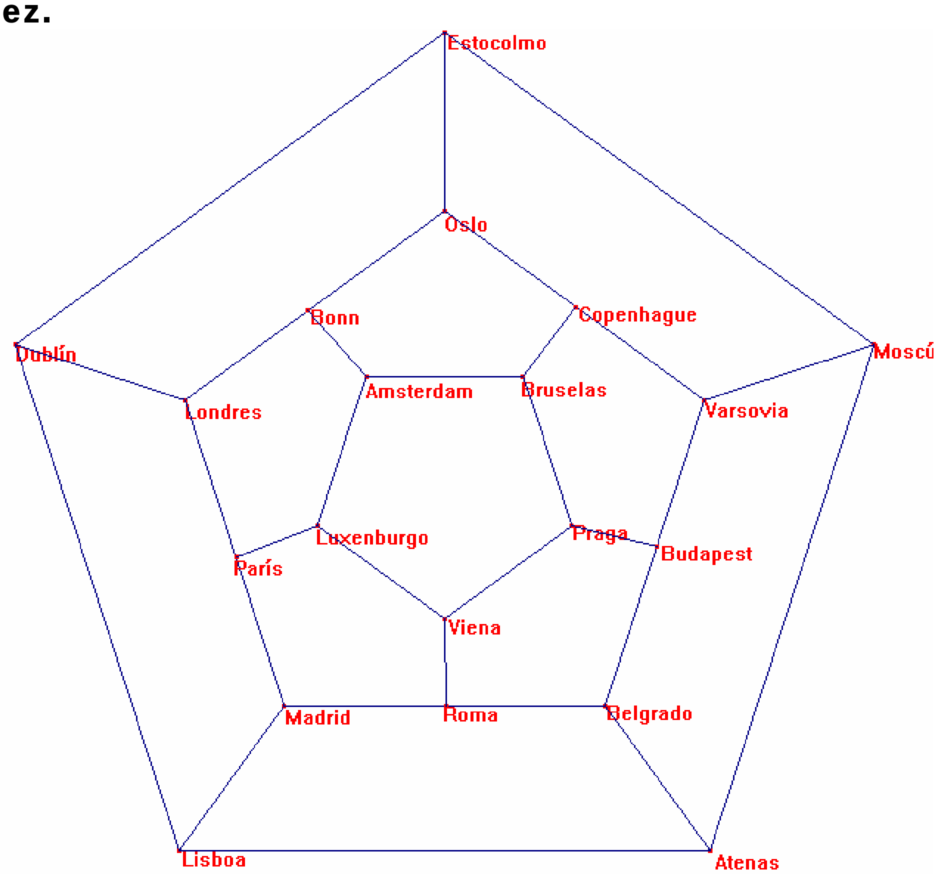


Si no te sale, lo que es muy probable, **¿Qué te parecería tratar de resolverlo sobre una banda de Moebius?** ¿Será mas difícil todavía,….ó no?

1.11. Viaje por el mundo.

William Rowan Hamilton fue uno de los abundantes “monstruos precoces” que se han dado en la historia de las matemáticas. Nació en Dublín en 1805. A los cinco años leía latín, griego y hebreo. A los diez conocía media docena de lenguas orientales y pronto mostró también, un profundo interés por las matemáticas. A los 23 años fue nombrado Astrónomo Real, Director del Observatorio de Dunsink y profesor de Astronomía. Se ocupó principalmente del Algebra y a él se debe la primera presentación rigurosa de los números complejos.

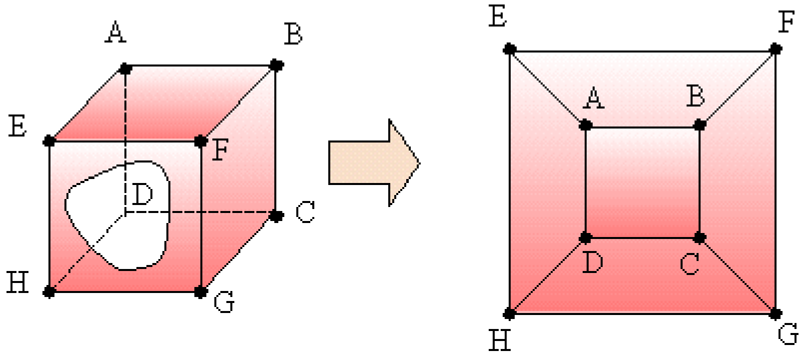
Inventó un juego que llegó a venderse con gran éxito y se puso de moda por algún tiempo. Se llamaba *Viaje por el Mundo* y consistía en un dodecaedro regular de madera. En cada vértice había un pivote con el nombre de una ciudad. La tarea consistía en señalar un itinerario continuo por los bordes del dodecaedro, que recorriese, partiendo de una ciudad determinada, cada una de las ciudades una sola vez. El recorrido se iba señalando mediante una lana de color.
Como el dodecaedro es muy poco manejable, puedes practicar con el siguiente grafo, que representa el dodecaedro con ciudades de Europa en los vértices. Busca un **recorrido para visitar todas las ciudades una sola vez.**



Cuando lo consigas prueba a recorrer **todos los caminos una sola vez**.

Diagramas de Schlegel.

Como has visto con el dodecaedro, todo poliedro se puede transformar en un grafo. La figura siguiente nos muestra cómo hacerlo en el cubo. Apoyamos el cubo en una pared (cara ABCD), rompemos una cara (EFGH) y estiramos las otras caras sobre la pared (sin romper las aristas) rodeando el cuadrado obtenido con la cara rota.

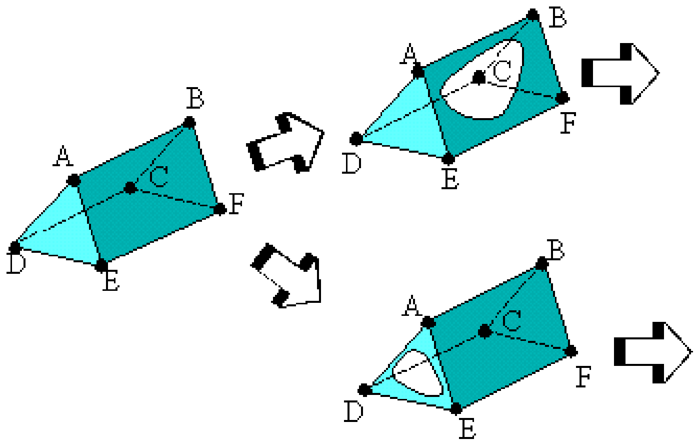


Esta representación de un poliedro se llama **diagrama de Schlegel**, en donde cada región, incluida la exterior, corresponde a una cara de dicho poliedro.
Los poliedros regulares tienen un diagrama de Schlegel único, pero cualquier otro tendrá varios, dependiendo de la cara que rompamos.

2.1. Dibuja el diagrama de Schlegel de los demás **sólidos platónicos**. (Una forma de ayudarte consiste en, una vez construido el poliedro, quitar una de sus caras y mirar hacia el interior).

2.2 Prisma.

Completa el dibujo siguiente:

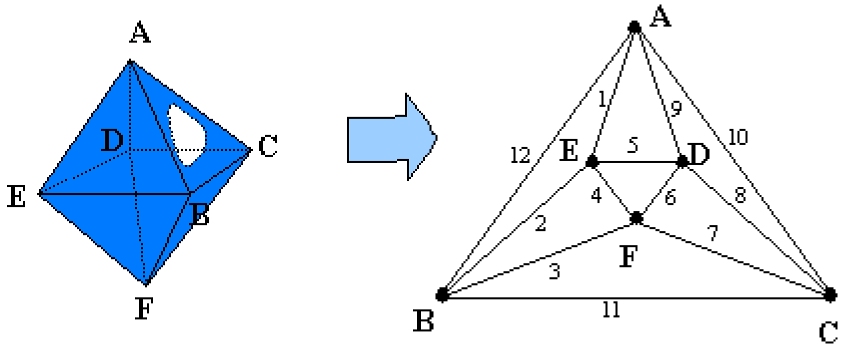


2.3. Dibuja dos diagramas de Schlegel de una **pirámide pentagonal**.

2.4. Una araña está situada en un vértice de un octaedro. Queremos averiguar **el recorrido que ha de hacer la araña**, de manera que pase una sola vez por cada una de las aristas y vuelva al punto A de partida.

Solución:

Los diagramas de Schlegel nos permiten ver a la vez todas las caras, aristas y vértices de un poliedro, así como el orden de cada vértice, lo que nos facilitará el estudio de determinados problemas, tales como los de **recorrido y coloración**.



Si hacemos su diagrama de Schlegel (indicado en la figura), resulta más fácil averiguarlo. Un posible recorrido es el indicado con números.