

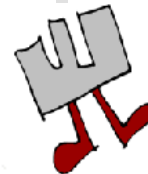
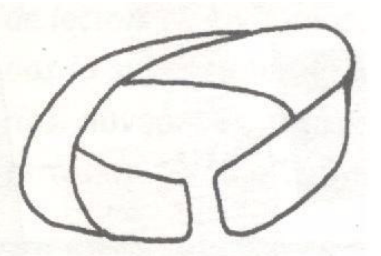
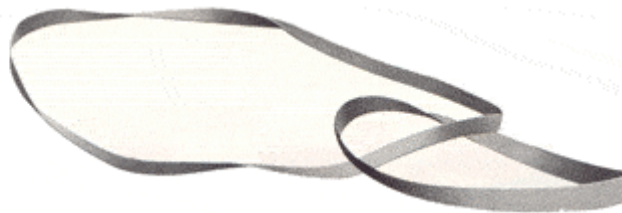
CON UNA TIRA DE PAPEL

CINTA DE MÖBIUS

Una tira de Möbius se hace fácilmente con una tira lisa de papel corriente: primero se da media vuelta a la tira y después se unen los extremos para obtener un anillo cerrado.



Sorprende por sus propiedades, y por lo inesperado de los resultados que se obtienen al cortarla convenientemente.



I.E.S. "Celso Díaz"
Arnedo (La Rioja)

**Departamento de
Matemáticas**

Pero también podemos utilizar una tira de papel para conseguir algunos de los polígonos regulares.

CUADRADO

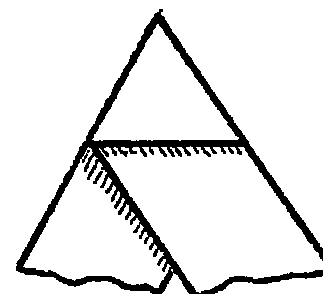
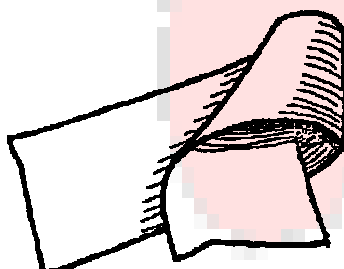
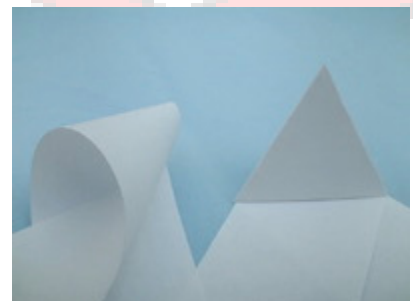


Partimos de una tira de papel cuyo extremo sea recto y perpendicular al lado. Si no fuese así, en cualquier lugar de la tira doblaríamos haciendo coincidir un trozo de un lado sobre sí mismo y resultaría un doblez de las características pedidas. Para obtener un cuadrado basta doblar la cinta por un extremo, de forma que partiendo desde un vértice se lleva el otro vértice sobre el lado opuesto. En el lugar donde descansa el vértice que se desplaza, se realiza un pliegue perpendicular al lado y ya tenemos un cuadrado. Lo único que hemos hecho

ha sido aplicar las propiedades del cuadrado, que es un polígono con los ángulos de 90° y los cuatro lados iguales

TRIÁNGULO EQUILÁTERO

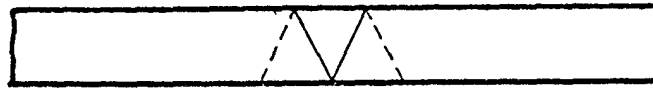
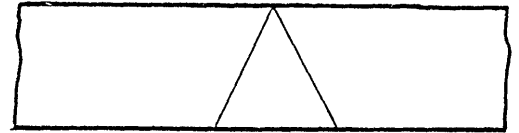
Para conseguir un triángulo equilátero torcemos un extremo de la tira por encima del lado, como si hiciéramos un cucurucho de papel, y aplanamos ese cono de modo que uno de los lados del triángulo coincida con el filo de la tira de papel. Dado que los lados coinciden, el vértice superior está dividiendo el ángulo de 180° (correspondiente al lado que se ha girado) en tres partes iguales, por lo que obtenemos un ángulo de 60° . Se puede comprobar fácilmente que los restantes ángulos también lo son, luego el triángulo es equilátero.



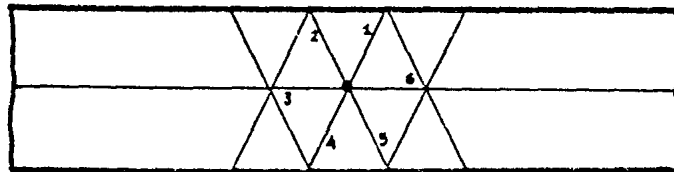
HEXÁGONO

Es fácil, una vez que tienes el triángulo equilátero. Tienes la tira así:

Doblas por la mitad y te resulta así

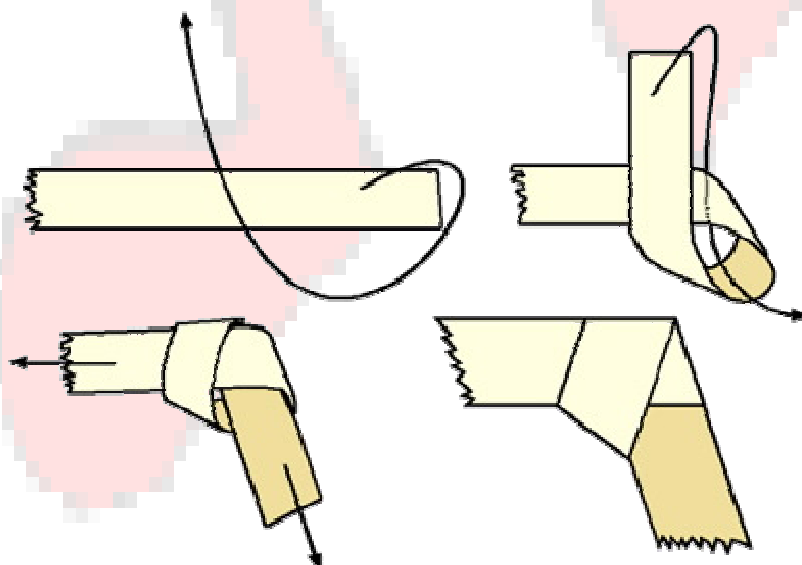
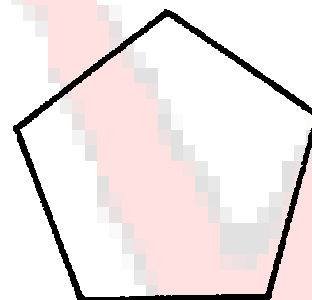
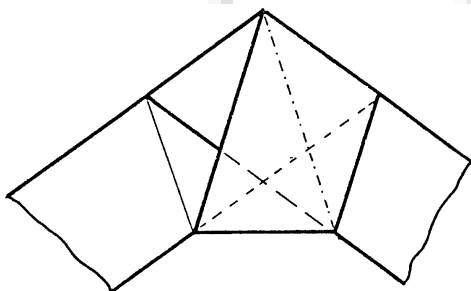
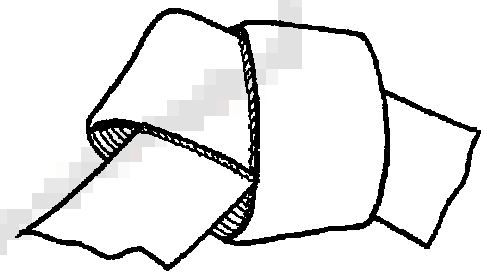


Ahora pliegas unas cuantas veces por los pliegues que han quedado señalados de antes y verás cómo al desplegar te resulta el exágono con los radios y el centro señalados de esta forma



PENTÁGONO

Lo que debemos hacer es un nudo con el papel, de forma que si tiramos con cuidado de las puntas del lazo haciendo que coincidan los pliegues podemos observar el pentágono regular. La primera vez que se hace cuesta conseguir que los pliegues formen exactamente los lados del polígono, pues es fácil que la tira no coincida con alguna de las vueltas. Lo mismo ocurre al principio con el triángulo, pero con un poco de práctica sale perfecto. A diferencia de los casos anteriores, en el pentágono es necesario tener en cuenta la longitud de la cinta, pues si es corta no puede realizarse bien el nudo. Nuestro consejo es que la longitud sea unas ocho veces (como mínimo unas siete) la anchura de la cinta, para que así se pueda manipular bien



I.E.S. "Celso Díaz"
Arnedo (La Rioja)

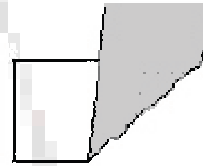
Departamento de
Matemáticas

Otros dobleces:

1. Se inicia con una tira larga de papel:



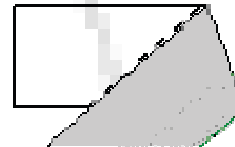
2. Dobla hacia ARRIBA en *cualquier* ángulo:



3. Desdobra:



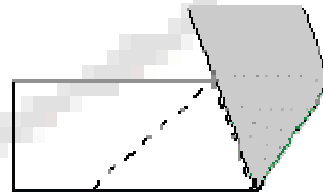
4. Dobla hacia ABAJO siguiendo el doblez anterior:



5. Desdobra nuevamente:



6. Vuelve a doblar hacia ARRIBA siguiendo el doblez anterior:



7. Desdobra otra vez:



8. Otra vez dobla hacia ABAJO siguiendo el doblez anterior:



9. Desdobra:



10. Continúa doblando alternativamente hacia ARRIBA y hacia ABAJO (A^1-B^1), siempre siguiendo el doblez anterior:



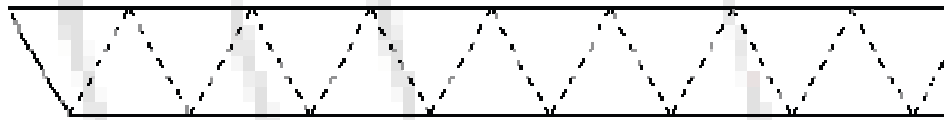
Es posible observar que la tira se va llenando de dobleces que forman triángulos, los cuales parecen ser equiláteros hacia el final de la tira. Para cualquier trabajo con esta tira se deberán eliminar los primeros triángulos, es decir, los triángulos que son más irregulares.

Con una tira de este tipo (llena de triángulo equiláteros) prueba a formar un triángulo. Sin embargo, es fácil descubrir que es aún más fácil formar un hexágono.

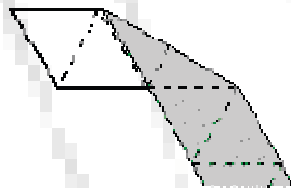
Hexágonos:

Para realizar el exágono se introduce un doblez secundario que va a bisecar uno de los ángulos ya producidos en una tira de triángulos equiláteros.

1. Comienza con una tira de triángulos equiláteros (se han eliminado los primeros triángulos irregulares):

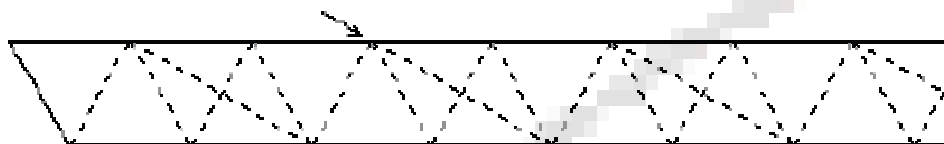


2. Se realiza un doblez secundario, para lo cual dobla hacia ABAJO exactamente como se muestra:

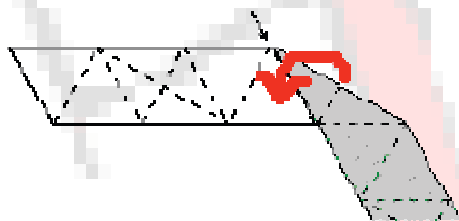


3. A intervalos regulares realiza el mismo doblez secundario. El resultado se muestra más abajo.

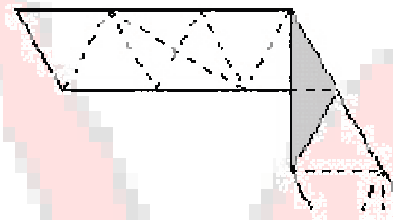
4. PLIEGA la tira siguiendo el doblez indicado por la flecha, de tal manera que los dos puntos rojos queden uno sobre el otro:



5. Ahora pliega siguiendo el doblez indicado por la flecha negra, como si se estuviera TORCIENDO la tira (es decir, siguiendo la flecha roja):



6. El resultado es como el que se ilustra, siendo éste un vértice del exágono:



7. Repite los pasos 4 al 6 (algoritmo P-Y-T) a intervalos regulares.

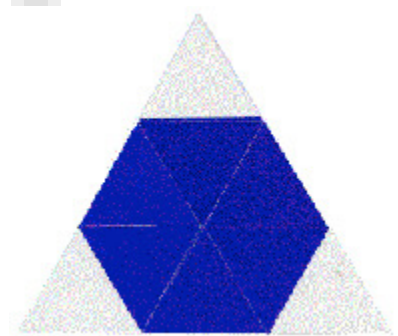
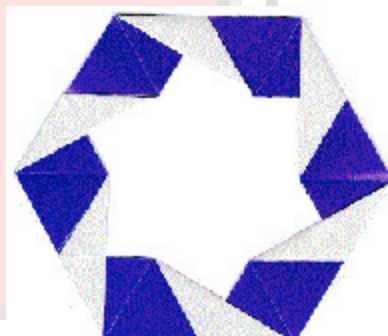
El Hexágono que se obtiene es como el de abajo a la izquierda:

Si a una tira de papel con triángulos equiláteros (sin el doblez secundario del exágono) se le aplica este mismo algoritmo se obtiene un triángulo como el de la derecha.



I.E.S. "Celso Díaz"
Arnedo (La Rioja)

Departamento de
Matemáticas



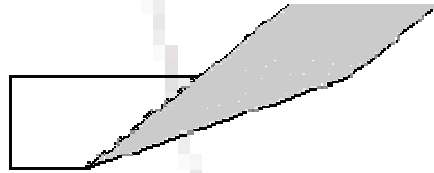
Pentágonos:

Realizando dos dobleces en la tira hacia ARRIBA y dos dobleces hacia ABAJO, consecutivamente, se obtiene el siguiente polígono: un pentágono.

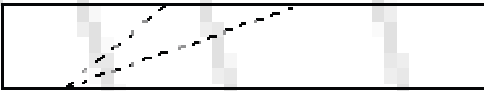
1. Se comienza con el paso 3 del triángulo (después de un doblez hacia ARRIBA en cualquier ángulo):



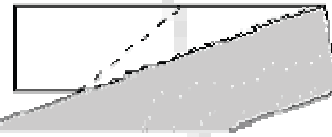
2. Dobla nuevamente hacia ARRIBA siguiendo el doblez anterior:



3. Desdobra:



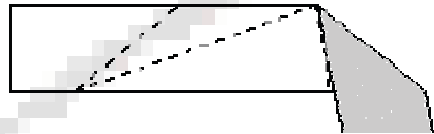
4. Ahora dobla hacia ABAJO siguiendo el doblez anterior:



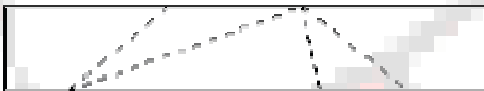
5. Desdobra nuevamente:



6. Dobla otra vez hacia ABAJO siguiendo el último doblez:



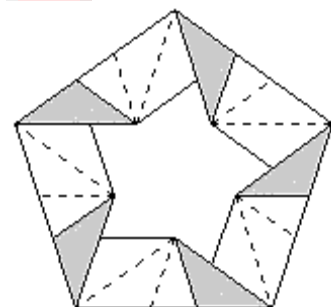
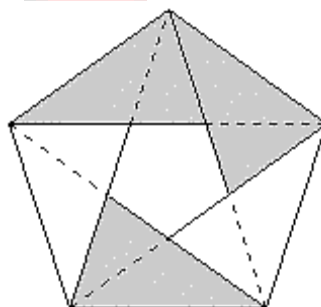
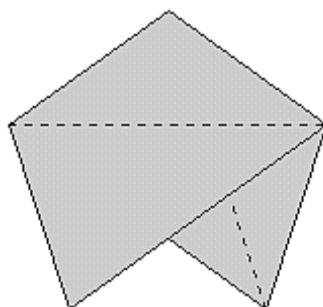
7. Desdobra nuevamente:



8. Continúa doblando consecutivamente dos veces hacia ARRIBA y dos veces hacia ABAJO (A^2-B^2), siempre siguiendo el doblez anterior, y queda algo así:



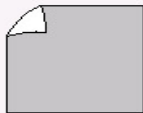
Los primeros triángulos (irregulares) se eliminan y así se puede plegar la tira siguiendo los diferentes dobleces. De hecho, se pueden observar dos tipos de dobleces: unos cortos y unos largos; si se usan los dobleces cortos se obtiene un pentágono como el de abajo a la izquierda, si se usan los dobleces largos el pentágono que queda es como el de abajo al centro. Si se utiliza el algoritmo P-Y-T el pentágono resultante es como el de abajo a la derecha:



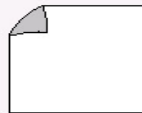
SÍMBOLOS BÁSICOS DE PAPIROFLEXIA

Posición del papel:

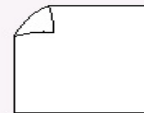
Color arriba. 



Color abajo. 

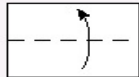
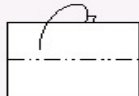
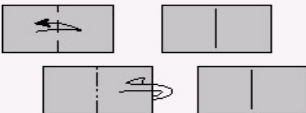


Papel de un solo color. 

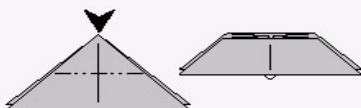
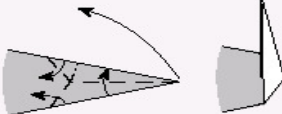
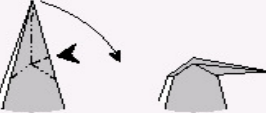


Pliegues y líneas básicas:

Todos los pliegues tienen una representación gráfica que esta compuesta por un tipo de línea y una flecha asociada a ella, así que simplemente viendo el tipo de flecha o de línea sabremos como debemos doblar. Esto puede ser muy útil en aquellas zonas del libro donde por su pequeño tamaño no se sepa con seguridad si la línea que aparece es valle o montaña.

Tipo de línea.	Proceso de plegado.	Explicación.
Pliegue valle. - - - - -	 	Consiste en doblar hacia delante, llevando un lado del papel sobre el otro.
Pliegue Monte. - - - - -	 	Consiste en doblar hacia atrás, llevando un lado del papel sobre el otro.
Plegar y desplegar. - - - - - o - - - - -		Esto en realidad no es un pliegue, son dos que se hacen uno tras otro. Consiste en doblar, bien sea en monte o en valle y a continuación desdoblar. El resultado que queda es una marca.
Marca. - - - - -		Las marcas son siempre el resultado de plegar y desplegar algo.
Rayos X. - - - - -		Este tipo de línea, puede representar pliegues que se están haciendo en alguna capa de nuestro modelo que no podemos ver o bien marcarnos alguna línea del borde de la figura que

Pliegues compuestos:

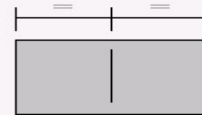
Pliegue escalonado. - - - - - y - - - - -		Consiste en un pliegue valle inmediatamente seguido por otro en monte. Su flecha asociada es quebrada y apunta en la dirección del valle.
Pliegue hundido.		Es una forma de invertir una punta, de forma que al terminar el hundido el modelo quede totalmente plano.
Pliegue hendido.		Es un pliegue muy similar al hundido, que generalmente se hace en las puntas para cambiarles la dirección.
Pliegue Vuelto.		Como en el caso anterior este proceso permite cambiar la dirección a una punta, pero en vez de doblar hacia el interior, se hace al exterior.
Pliegue en oreja de conejo.		Es un sistema sencillo para "adelgazar" una punta y al mismo tiempo cambiarla de dirección.
Doble oreja de conejo.		Consiste en dos orejas de conejo que se hacen al mismo tiempo por cada lado de la punta.
Estirar.		Se coge el modelo por donde indican las manos y se estira hasta obtener el resultado mostrado en el siguiente paso.

Otros Símbolos importantes:

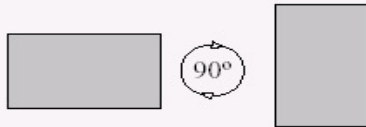
Repetir tantas veces como rayas tenga la flecha.



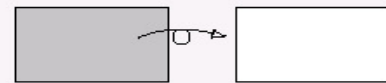
Partes iguales.



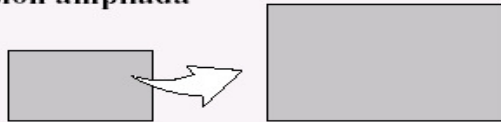
Girar.



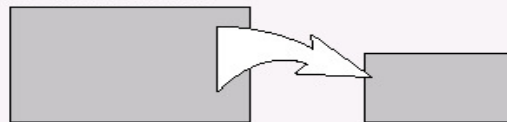
Volver el modelo.



Visión ampliada



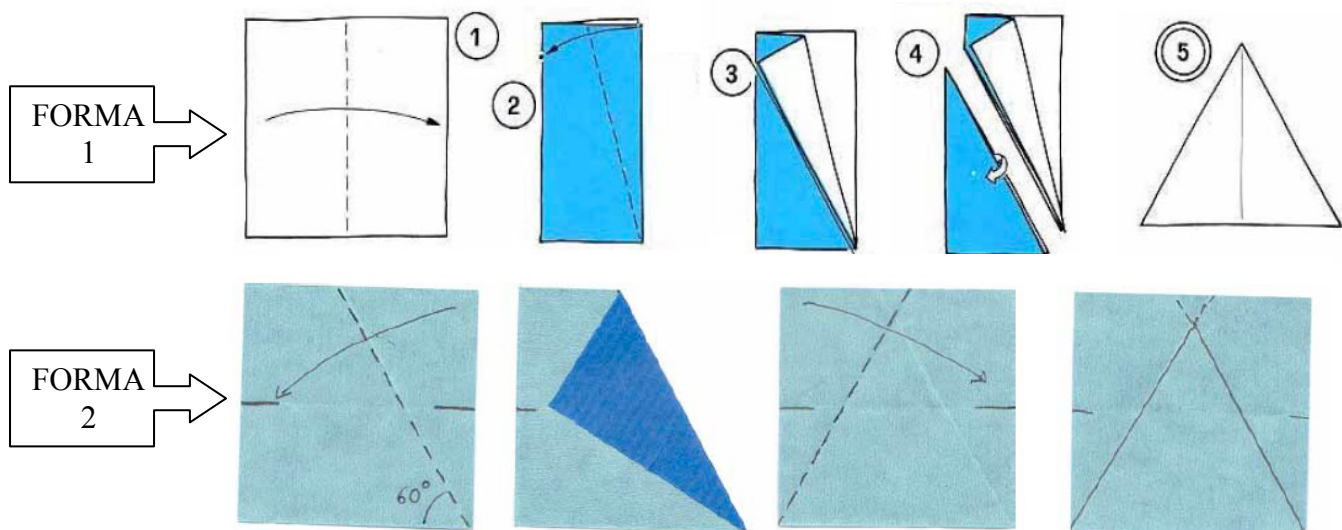
Visión disminuida



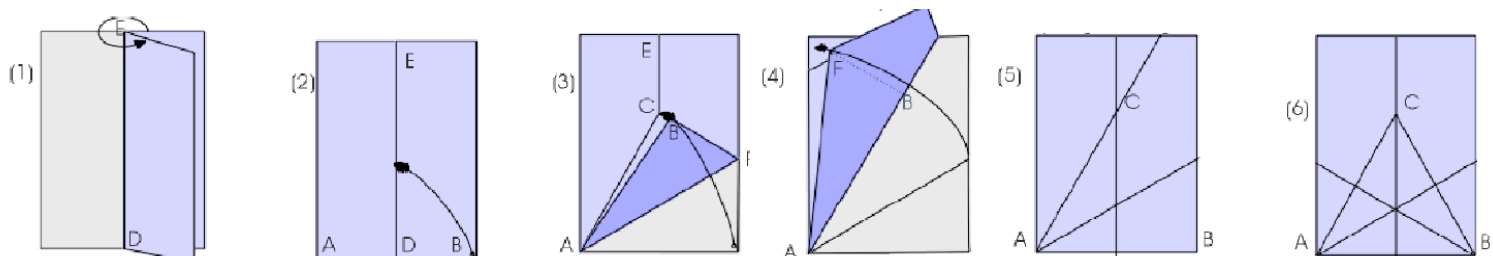
TRIÁNGULO EQUILÁTERO:

PARTIENDO DE UN CUADRADO

Hay muchas maneras distintas de hacerlo utilizando la papiroflexia, a continuación exponemos dos de ellas en las que se obtiene el triángulo equilátero de mayor área posible:

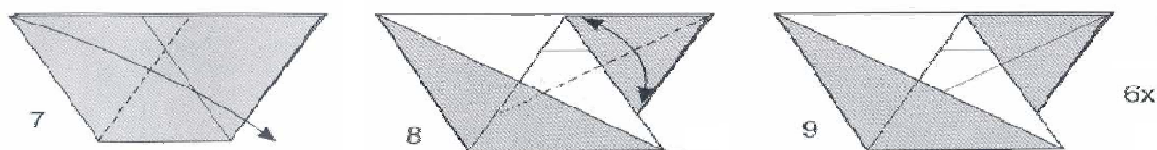
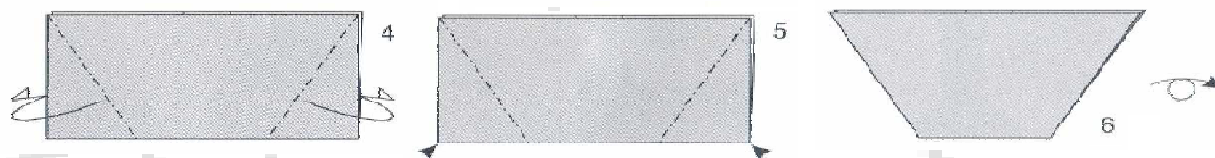
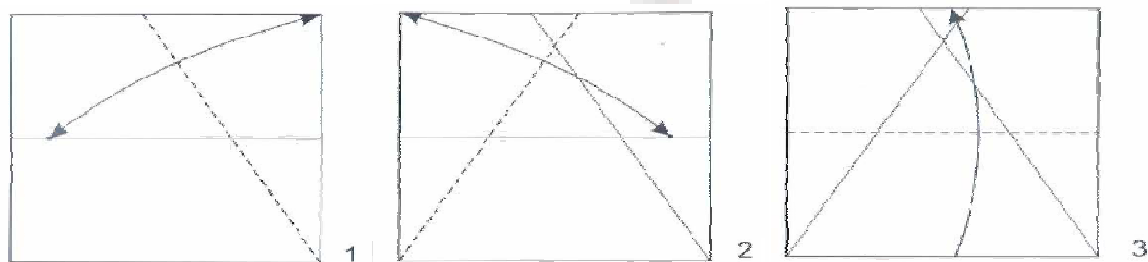


PARTIENDO DE UN RECTÁNGULO

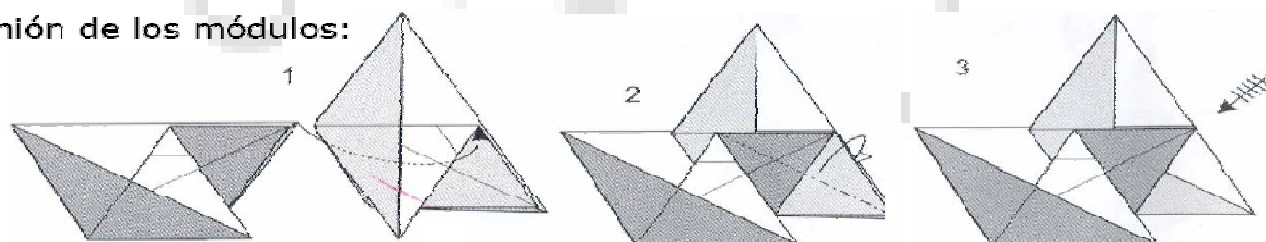


- (1) Doblamos el lado más corto AB por la mitad.
- (2) Desdoblamos la hoja y la doblamos nuevamente haciendo que B quede sobre la línea DE y dejando fijo A.
- (3) Marcamos el punto C sobre la línea ED, de tal manera que la distancia AC sea igual a la distancia AB.
- (4) Doblamos nuevamente sobre AC y marcamos esta línea.
- (5) Hemos trisecado el ángulo recto con vértice en A.
- (6) Si repetimos este proceso en el vértice B, obtenemos el triángulo equilátero ABC.

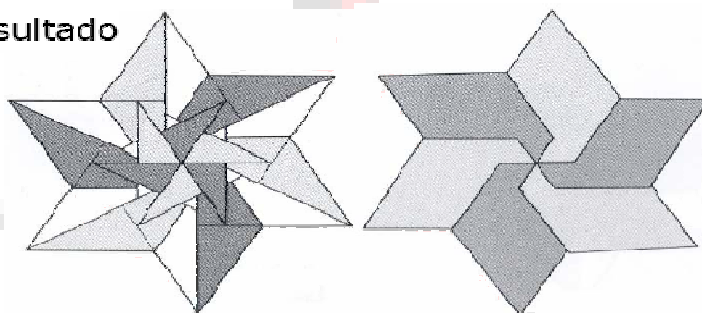
ESTRELLA DE SEIS PUNTAS



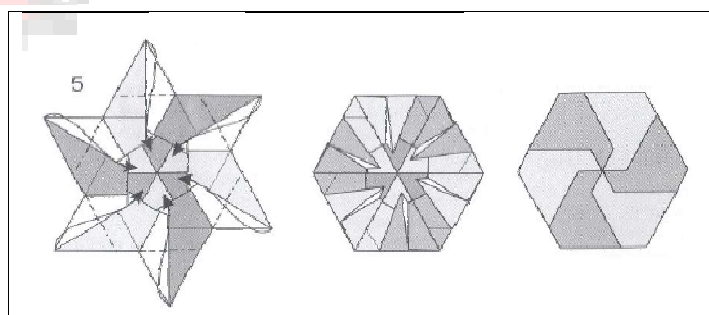
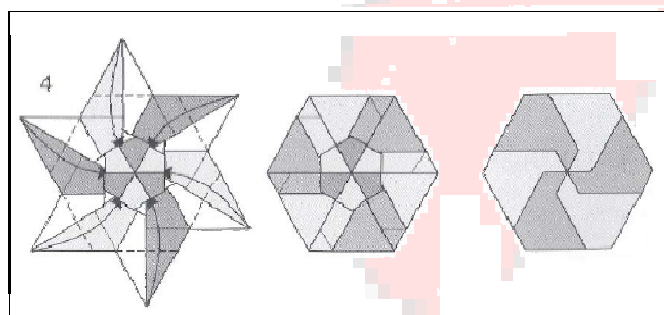
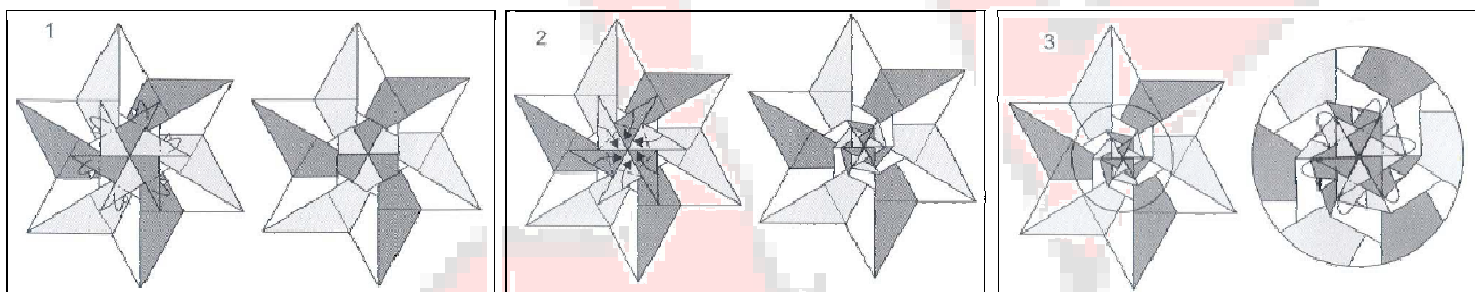
Unión de los módulos:



resultado



VARIACIONES



TETRAEDRO REGULAR

